

Indice

1. Il giorno che si decide in quaranta secondi
2. Che cosa succede quando un match finisce in parità
3. Che cosa deve decidere
4. Un ripasso: la nuvola e la sua ampiezza
5. Come si calcola uno spareggio che non si è mai tirato
6. La macchina che fa i conti
7. La prima sorpresa: la regola è già la migliore possibile
8. Quanto dovrebbero essere lontani i due arcieri
9. E capita proprio fra chi si somiglia
10. Perché il punteggio e lo spareggio vedono la stessa cosa in modo diverso
11. Quante frecce servirebbero davvero
12. Le quindici frecce che sono già sul bersaglio
13. Il tabellone: dove conta di più, sa di meno
14. Quanto dipende dalle ipotesi: le forme messe alla prova
15. Ciò che il modello non vede
16. I limiti
17. Che cosa portarsi a casa
18. Una freccia sola, nel punto sbagliato
19. Nota su dati, fonti e metodo
20. Appendice matematica

Lo spareggio nel tiro con l'arco: quanto vale una freccia sola

Il tiro che decide le finali è quasi un lancio di moneta — e non per il motivo che si crede

Matteo Campagna · matteocampagna.com

COME CITARE QUESTO LAVORO

Campagna, M. (2026). Lo spareggio nel tiro con l'arco: quanto vale una freccia sola. Versione 1.1, 11 ottobre 2026. Ricerca indipendente. <https://doi.org/10.5281/zenodo.23261945>

Il giorno che si decide in quaranta secondi

Cinque set giocati, cinque pari. Il tabellone segna cinque a cinque e il regolamento non prevede un sesto set: prevede una freccia. I due arcieri tornano in linea di tiro, tirano una freccia per uno, e vince chi la piazza più vicino al centro. Il match, il turno, la medaglia e talvolta un quadriennio di lavoro si decidono in quaranta secondi e in due tiri.

Chi guarda dagli spalti vede una scena breve e chiarissima. Chi è in linea vede qualcosa di diverso: un istante in cui tutto quello che ha costruito in anni finisce su una bilancia che non ha mai visto prima, e che non userà mai più fino al prossimo cinque pari.

Su questa regola tutti hanno un'opinione, e sono sempre le stesse due. La prima dice che è una lotteria, che ridurre una sfida a un colpo solo è un modo elegante di tirare una monetina, e che il regolamento ha barattato la giustizia con lo spettacolo. La seconda risponde che una freccia è pur sempre una freccia, che sotto pressione emerge chi è più forte, e che il più bravo quel tiro lo fa meglio proprio perché è il più bravo. Sono due posizioni rispettabili, si scontrano da quindici anni, e la discussione è rimasta quasi sempre senza cifre.

Ma uno spareggio non è un giudizio morale: è uno strumento di misura, e a uno strumento di misura si può fare una domanda che alle opinioni non si può fare. Non se sia giusto, ma quanto sbagli. Su cento volte che una freccia di spareggio viene tirata fra due arcieri di forza diversa, quante volte finisce per indicare quello più bravo? È una percentuale, e si ottiene dalla geometria del bersaglio e dalle regole di gara senza bisogno di andare al campo.

L'anticipo, perché tanto vale sapere subito dove si va a parare. Lo spareggio è in effetti vicino al lancio di moneta: nelle situazioni in cui viene davvero chiamato in causa indica il più preciso dei due (fra un attimo definirò con esattezza che cosa significa) poco più di cinquantacinque volte su cento, e in una finale olimpica scende a cinquantatré. Ma il motivo non è quello che si sente dire al campo, e la differenza non è una sottigliezza da specialisti: cambia completamente che cosa bisognerebbe fare per rimediare.

Queste pagine sono il seguito di un lavoro precedente sul set system e ne usano la stessa macchina. Chi lo ha letto ritroverà il modello della nuvola e il modo di passare da un punteggio alla larghezza di un gruppo; chi non lo ha letto non ha bisogno di recuperarlo, perché quel che serve è riassunto qui. La dif-

ferenza sta nell'oggetto: là si confrontavano due modi di contare un match intero, qui si guarda un colpo solo.

Che cosa succede quando un match finisce in parità

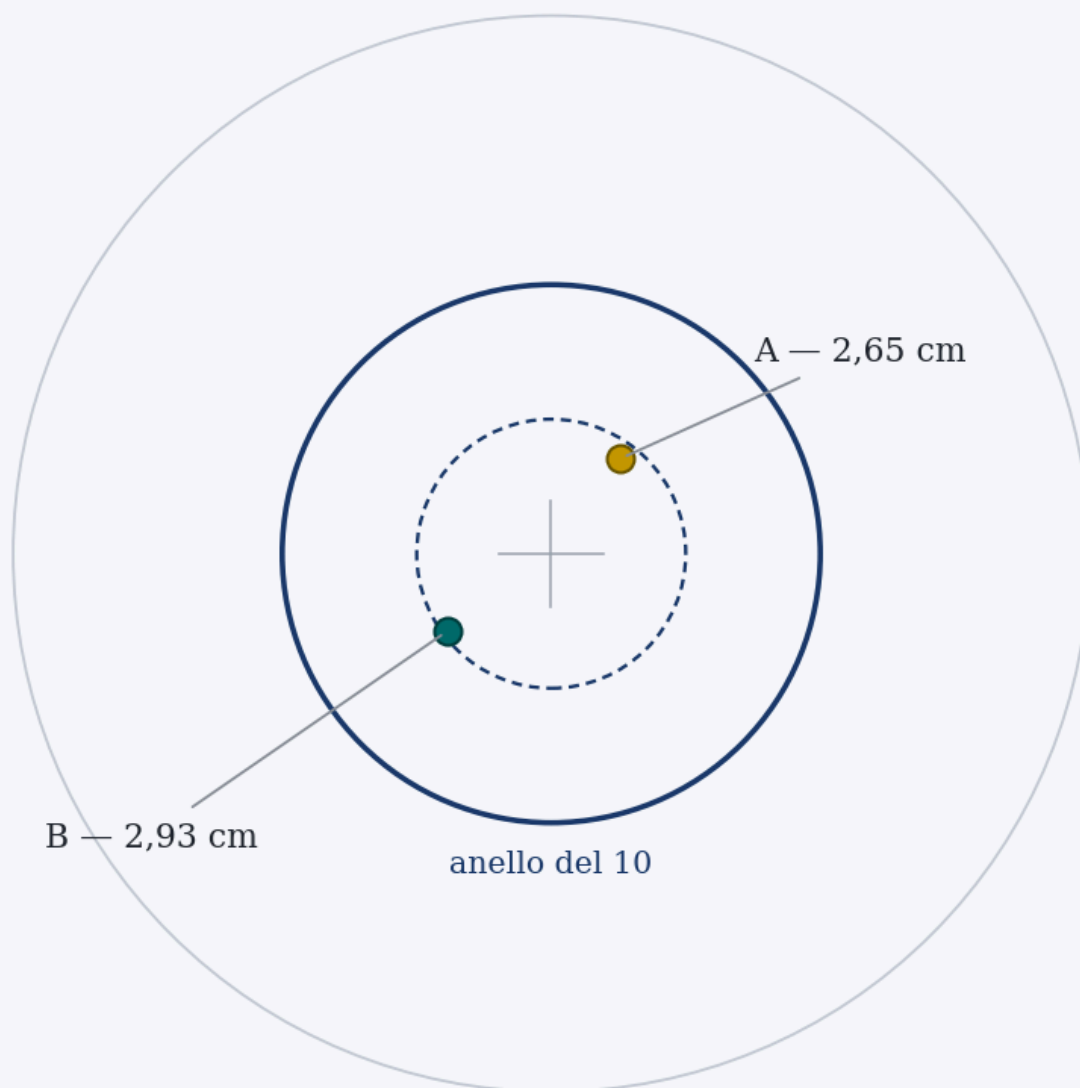
Vale la pena descrivere la procedura per intero, perché chi non frequenta i campi di gara la conosce di riflesso e chi li frequenta la dà troppo per scontata. Nel recurve individuale un match si gioca al meglio di cinque set da tre frecce. Ogni set vale due punti a chi totalizza di più, uno per uno se i due pareggiano, e vince il match chi arriva a sei punti-set. La somma delle frecce non conta: contano i set.

Questo produce un esito che il punteggio cumulativo non può produrre. Se dopo cinque set il tabellone dice cinque a cinque, non c'è modo di proseguire, perché i set sono finiti e nessuno ha raggiunto sei. Il regolamento allora cambia registro: chiede una freccia per uno, e assegna la vittoria a quella che atterra più vicino al centro.

Il regolamento confronta formalmente prima il punteggio e, a parità di punteggio, la distanza dal centro; se anche la distanza è la stessa si tira di nuovo, e se entrambe le frecce mancano la zona di punteggio entrambi tirano una freccia in più. La cosa importante, per quel che segue, è che i due criteri coincidono: per due frecce che colpiscono la zona di punteggio su un bersaglio fatto di cerchi concentrici, «anello più alto, poi più vicino al centro» e «più vicino al centro» producono sempre lo stesso vincitore, perché una freccia più interna non può finire in un anello di valore inferiore. Il caso del doppio errore è regolato a parte, e il modello continuo non lo rappresenta. La procedura è poi cambiata nel tempo: per qualche anno due dieci obbligavano a ripetere, e quella disposizione oggi non c'è più.

Nelle finali internazionali il tiro è alternato: un arciere per volta, venti secondi a freccia. Uno spareggio è quindi due tiri, poco più di quaranta secondi di orologio, più il tempo che i giudici impiegano a misurare. È una delle decisioni più compresse di questo sport, e spesso la più pesante.

Due frecce, 2,8 millimetri di differenza



Uno spareggio come lo vede il giudice: due frecce nel dieci, separate da meno di tre millimetri. Vince A. La domanda di questo lavoro è quante volte, decidendo così, si indichi davvero il più preciso dei due.

Il compound funziona diversamente, il match è cumulativo su quindici frecce, ma anche lì la parità si risolve con una freccia sola, e tutto ciò che segue vale per entrambi gli archi.

Che cosa deve decidere

Prima di contare quante volte lo strumento sbaglia, va stabilito che cosa conti come errore. E va stabilito adesso, a risultati non ancora guardati: se si definisse il più bravo come chi ha vinto, ogni regola risulterebbe infallibile e la domanda si dissolverebbe da sé.

Il criterio adottato qui è uno solo: chi raggruppa più stretto. Nient'altro. È una scelta deliberatamente povera, che tiene fuori tutto ciò che un allenatore metterebbe dentro (la tenuta nervosa, la gestione del

vento, la capacità di produrre il tiro giusto quando serve) e lo tiene fuori proprio nel momento in cui quelle qualità pesano di più, dato che nessun tiro è più gravato di quello di spareggio.

La scelta ha però una virtù che compensa la povertà: è verificabile. Il gruppo di un arciere lo si misura, lo si confronta, lo si segue nel tempo. Le altre qualità sono reali ma non hanno un metro condiviso, e usarle come definizione significherebbe misurare uno strumento con un altro strumento non tarato.

Con questa definizione in mano la domanda diventa netta. Due arcieri hanno gruppi di larghezza diversa; uno tira più stretto dell'altro. Una freccia per uno: quante volte quella freccia sa dire quale dei due è il più stretto?

Conviene fissare subito i due estremi della scala su cui leggeremo ogni risposta. Il pavimento è il cinquanta per cento, perché quel risultato lo si ottiene lanciando una monetina senza nemmeno guardare il bersaglio; e nessuna regola sensata può scendere sotto, perché se una indovinasse meno della metà delle volte basterebbe invertirla per farla risalire. Il soffitto è il cento per cento. Tutto il lavoro consiste nel misurare dove, fra questi due estremi, cada quella freccia.

Un ripasso: la nuvola e la sua ampiezza

Serve un solo strumento, e chi ha già letto il lavoro sul set system lo conosce: un gruppo di frecce si lascia descrivere da un numero solo. Il motivo è più semplice di quanto sembri. Un arciere che non abbia un difetto sistematico sbaglia a sinistra quanto a destra, in alto quanto in basso, e della stessa entità in ogni direzione. Se le cose stanno così la direzione non distingue nessuno da nessuno: l'unica cosa che cambia da un arciere all'altro è quanto lontano dal centro finiscono le frecce. E quanto lontano, tipicamente, è un numero solo: l'ampiezza della nuvola, per la quale si usa la lettera greca sigma, espressa in centimetri. Nuvola stretta, sigma piccolo, arciere fortissimo.

Gli anelli, dal canto loro, sono corone larghe sempre uguale, sei virgola uno centimetri sulla faccia da centoventidue, e i loro bordi cadono a distanze note dal centro. Sapere come si distribuiscono le distanze significa perciò sapere quanto spesso una freccia cade dentro ciascun anello: da quell'unico numero si ricava con quale probabilità esce un dieci, un nove, un otto a ciascun tiro, e di conseguenza il totale che ci si attende su settantadue frecce.

È l'unica formula che queste pagine mostrano per intero, perché è la sola di cui serva la vista per capire da dove viene tutto il resto: la probabilità che una freccia cada entro una certa distanza dal centro, in funzione dell'ampiezza del gruppo.

$$F(r) = 1 - e^{(-r^2 / 2\sigma^2)}$$

Si legge così: la probabilità di cadere entro il raggio r vale zero al centro e tende a uno molto lontano, e quanto più il gruppo è stretto tanto prima arriva vicino a uno. Un arciere da 690 punti tiene metà delle frecce entro 5,3 centimetri dal centro e il novanta per cento entro 9,6 centimetri; uno da 650 ha bisogno rispettivamente di 8,4 e 15,4 centimetri per contenere le stesse quote. Tutto il resto del lavoro discende da qui, e chi volesse la catena completa (i ventisei passaggi che portano da questa formula a ogni numero pubblicato) la trova nell'appendice, ciascuno spiegato a parole prima che in simboli.

La relazione si può percorrere anche al contrario: a ogni punteggio medio atteso corrisponde una sola ampiezza di nuvola. Vale la pena precisare medio atteso, perché il punteggio di una singola gara è una realizzazione fra le tante, e da solo non basta a fissare l'ampiezza; quando più avanti si parla di «un arciero da 690» ci si riferisce sempre a un profilo che vale mediamente 690 punti, non a un risultato letto su un tabellone.

Conviene fissare l'unità di misura, perché tornerà a ogni pagina. Un punto sul totale di 72 frecce corrisponde a sette decimi di millimetro di larghezza del gruppo. Chi totalizza 690 punti sul massimo di 720 tira dentro una nuvola larga quattro centimetri e mezzo e colpisce il dieci sei volte su dieci; chi ne totalizza 650 ne ha una di sette e passa, e il dieci lo trova tre volte su dieci. Sul bersaglio, la distanza fra questi due mondi si misura in frazioni di millimetro.

Come si calcola uno spareggio che non si è mai tirato

Qui c'è il passaggio che di solito viene saltato, e che invece è la parte più interessante del mestiere. Come si fa a dire quante volte una freccia indichi il più preciso, se quella freccia non è mai stata tirata?

La strada che verrebbe in mente per prima è simulare: si programma un computer perché finga di tirare, gli si fanno giocare dieci milioni di spareggi, si contano i risultati. È una strada legittima e in molti campi è l'unica disponibile. Ha però un difetto: la risposta che restituisce è affetta da rumore, perché dieci milioni di prove non sono infinite, e due esecuzioni dello stesso programma danno due numeri leggermente diversi. Quando la differenza da misurare vale qualche punto percentuale, il rumore diventa un problema serio.

Qui non si simula mai. Ogni numero di queste pagine è calcolato per via deterministica — in forma chiusa dove esiste, altrove per quadratura con tolleranza dichiarata — e conviene spiegare che cosa significhi con un esempio che si può seguire senza matematica.

Immaginiamo di voler sapere quante volte la freccia di A cade più vicino al centro di quella di B. Non serve tirarle. Sappiamo, per ogni distanza dal centro, quanto è probabile che A ci finisca; sappiamo la stessa cosa per B. Allora, per ogni possibile distanza della freccia di A, calcoliamo quanto è probabile che quella di B cada più lontano, e sommiamo su tutte le distanze pesando ciascuna per la sua probabilità. Il risultato è la risposta esatta, senza aver tirato nulla. È lo stesso modo in cui si calcola la probabilità che due dadi diano una certa somma: non si tirano i dadi, si contano i casi.

Per un match intero il ragionamento si complica ma non cambia natura. Una volata è la somma di tre frecce: la sua distribuzione si ottiene combinando tre volte quella di una freccia sola, con un'operazione che si chiama convoluzione e che di fatto elenca tutti i modi di ottenere ciascun totale. Da lì si ricava quanto spesso A vinca una volata, quanto spesso pareggi, quanto spesso perda. E poi il match si percorre a ritroso: si parte dalla fine (dove il vincitore è noto) e si risale set dopo set, chiedendo a ogni passo quale sia la probabilità di trovarsi in ciascuno dei punteggi possibili. È la stessa tecnica con cui si calcola una partita a scacchi con pochi pezzi rimasti: dal fondo verso l'inizio.

Ne segue una proprietà che vale la pena dichiarare, perché è la ragione per cui questi numeri si possono contestare con profitto. Chi ripetesse il conto domani, con lo stesso metodo, otterrebbe le stesse cifre fino all'ultimo decimale. Non circa le stesse: le stesse.

La macchina che fa i conti

Un lavoro come questo produce numeri che nessuno può verificare a occhio, e quindi la domanda giusta da porgli non è se siano plausibili, ma come si possa scoprire che sono sbagliati. Vale la pena raccontare i controlli, perché sono la parte del lavoro che dà diritto a essere creduta.

Il primo livello è la doppia implementazione. Ogni numero di queste pagine è stato calcolato due volte, da due programmi scritti separatamente a partire dalla stessa specifica matematica e senza condividere una riga di codice. Quando due traduzioni indipendenti dello stesso testo danno lo stesso risultato, l'errore possibile si riduce a un fraintendimento del testo, che è esattamente ciò che la specifica serve a evitare.

Il secondo è il campionamento casuale usato al contrario. Il calcolo esatto non ha bisogno di simulazione, ma una simulazione può comunque servire da controllo esterno: si fanno tirare qualche milione di frecce a un generatore di numeri casuali e si guarda se la frequenza osservata coincide con la probabilità calcolata, entro l'errore che quel numero di prove comporta. Se non coincide, uno dei due è sbagliato. In questo lavoro il controllo ha effettivamente trovato un errore, ed è stato in un caso istruttivo: la simulazione generava frecce più strette del dovuto per una svista di un fattore radice di due, e il difetto si mostrava soltanto nei conti che passavano per gli anelli, perché i confronti fra due arcieri sono insensibili a una scala sbagliata applicata a entrambi.

Il terzo livello riguarda le grandezze che non hanno una formula chiusa, come le nuvole ellittiche. Lì si integra numericamente, cioè si spezza un'area in tantissime strisciole e si sommano; e il controllo consiste nel dimezzare la larghezza delle strisciole e verificare che il risultato non si muova. Se si muove, la griglia era troppo grossa. Anche qui il controllo ha trovato qualcosa, e di grosso: una prima versione della formula per le nuvole ellittiche pesava le direzioni in modo uniforme, quando invece in una nuvola allungata le frecce si addensano lungo l'asse lungo. L'errore arrivava a due decimi sulla probabilità, ed era sopravvissuto a un controllo casuale perché quel controllo verificava il confronto fra due arcieri e non la calibrazione di ciascuno.

Il quarto è la suite automatica: sessantasette prove che il pacchetto allegato esegue e che coprono ogni valore pubblicato, più centocinquantuno controlli di riproduzione che ricalcolano una per una le cifre di queste pagine e si fermano se una non torna. Chiunque scarichi il pacchetto può lanciarli e vedere il risultato.

La lezione di tutti e quattro, messa in una riga sola: un controllo verifica ciò che sa cercare, e i due errori peggiori trovati in questo lavoro sono sopravvissuti a controlli che guardavano il risultato invece dell'ingresso da cui il risultato dipende. È il motivo per cui il pacchetto viene distribuito: perché lo guardi qualcuno che non è chi lo ha scritto.

La prima sorpresa: la regola è già la migliore possibile

L'obiezione istintiva allo spareggio riguarda il modo di leggerlo. Decidere una medaglia guardando quale delle due frecce sia geometricamente più vicina a un punto sembra un criterio rozzo, quasi da sorteggio travestito. Vale la pena metterla alla prova, perché il conto dice il contrario e lo dice in modo netto.

Il ragionamento è più semplice di quanto la sua formulazione tecnica lasci intendere. Immaginiamo di guardare le due frecce sul bersaglio e di dover scegliere fra due racconti: «il gruppo più stretto è quello di A» oppure «il gruppo più stretto è quello di B». Un arciere a gruppo stretto lascia frecce vicine al centro più spesso di uno a gruppo largo; un arciere a gruppo largo lascia frecce lontane più spesso di uno a gruppo stretto. Se la freccia di A è più vicina di quella di B, il primo racconto spiega meglio del secondo quello che abbiamo davanti, perché è esattamente ciò che ci si aspetterebbe da un tiratore a gruppo stretto contro uno a gruppo largo. Se è più vicina quella di B vale il contrario. Non esiste un terzo caso.

Il conto rende esatta questa intuizione e ne mostra anche la forza. Fra un arciere da 690 punti e uno da 670, una freccia piantata a un centimetro dal centro ha il sessantotto per cento di probabilità in più di venire dal primo; una a dodici centimetri ha due volte e mezzo la probabilità di venire dal secondo. Da qualche parte in mezzo (poco oltre i sette centimetri, per questa coppia) c'è una distanza alla quale i due sono ugualmente probabili. Ma il punto notevole è che quella soglia non serve conoscerla: comunque essa si sposti, cioè quali che siano le due ampiezze, purché le nuvole siano circolari e centrate, il confronto finisce sempre per dipendere soltanto da quale delle due frecce è più vicina al centro. È il motivo per cui la regola può funzionare senza sapere nulla di chi ha tirato.

In statistica questo si chiama test del rapporto di verosimiglianza, ed è il metro con cui si giudica se una regola di decisione sfrutti tutta l'informazione disponibile o ne butti via un pezzo. Lo spareggio la sfrutta tutta: né pesare le frecce diversamente, né guardare l'anello invece della distanza, né alcun accorgimento più sofisticato migliorerebbe la decisione. La regola che tutti additano è, per il compito che le viene assegnato, ottima.

Un confine va però dichiarato, perché l'ottimalità non è assoluta: vale sotto il modello di nuvola circolare e centrata sul punto di mira. Se un arciere avesse un errore sistematico noto (il gruppo spostato in alto a destra, per dire) la lettura migliore terrebbe conto anche della direzione della freccia e non solo della sua distanza dal centro. Nessun regolamento potrebbe usare un criterio del genere, che richiederebbe di conoscere in anticipo il difetto di ciascun arciere; ma la frase corretta è che la regola attuale è ottima date le informazioni che un giudice può avere, non ottima in senso assoluto.

L'accusa, comunque, va spostata. Il problema non è come si legge quella freccia. È che è una.

Quanto dovrebbero essere lontani i due arcieri

C'è un modo pulito di dire quanto vale uno strumento di misura, e consiste nel chiedergli quanto grande debba essere una differenza perché lui riesca ad accorgersene. Una bilancia da cucina distingue due etti da due etti e mezzo, non due grammi da tre. La domanda, applicata allo spareggio, suona così: quanto devono essere distanti due arcieri perché la freccia sappia sceglierli con una certa affidabilità?

La risposta è una tabella, e vale la pena leggerla con calma perché i numeri sono più grandi di quanto chiunque si aspetterebbe. Prendiamo come riferimento un arciere da 690 punti sul massimo di 720, cioè un livello da finale internazionale.

affidabilità richiesta	divario necessario, in punti sul totale di 72 frecce	differenza di ampiezza del gruppo
55 volte su 100	7,0	4,7 mm
60 volte su 100	14,8	10,0 mm
due volte su tre	27,3	18,5 mm
tre volte su quattro	48,3	32,7 mm

Perché la freccia di spareggio indichi il più preciso anche solo sessanta volte su cento, i due arcieri devono essere separati da quasi quindici punti su settantadue frecce. È un divario largo: dieci millimetri di ampiezza del gruppo, cioè la distanza che passa fra un arciere di vertice e uno di buon livello, non fra due che si somigliano al punto da incontrarsi in un turno avanzato. E per arrivare a due volte su tre, un'affidabilità che nessuno accetterebbe da un cronometro, ne servono ventisette.

Detto al rovescio, e forse più chiaramente: fra due arcieri separati da cinque punti su settantadue frecce, cioè da tre millimetri e quattro decimi di gruppo, lo spareggio indica il migliore quasi cinquantaquattro volte su cento. È informazione, non è zero. Ma è quasi zero.

Un'ultima riga di questa tabella merita attenzione perché cambia a chi si applica il discorso: le cifre sopra valgono a livello da finale internazionale, e peggiorano scendendo. Perché lo spareggio arrivi al sessanta per cento servono dodici punti e mezzo di divario fra due arcieri da 700, quasi quindici fra due da 690, ma diciannove fra due da 670 e quasi ventiquattro fra due da 650. Più si scende di livello, più quella freccia sa poco. Il motivo è geometrico: a livelli bassi le nuvole sono larghe, e due nuvole larghe si sovrappongono molto anche quando i punteggi differiscono parecchio.

E capita proprio fra chi si somiglia

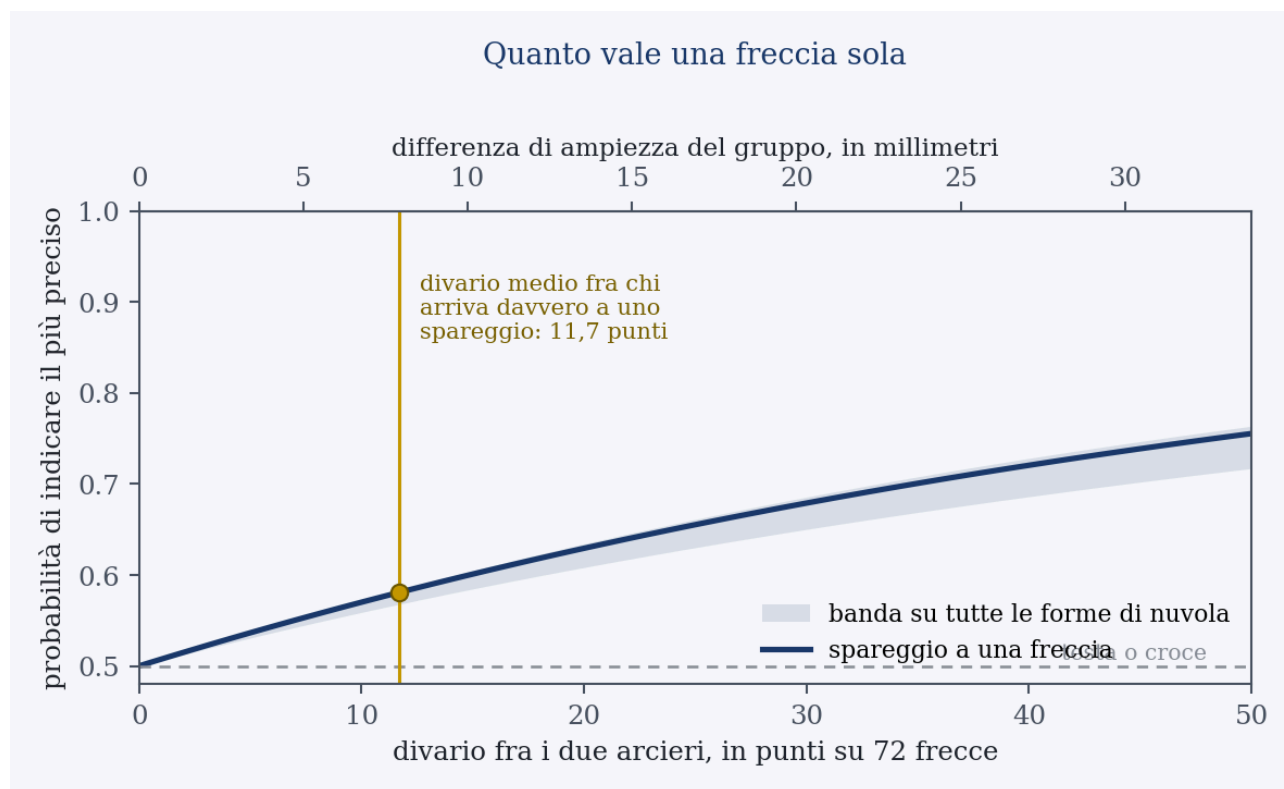
Qui il quadro peggiora, e peggiora per una ragione che ha una sua ironia. Uno spareggio non capita a caso: capita perché i due sono arrivati in parità. E arrivano in parità soprattutto quando si somigliano. Lo strumento, insomma, viene chiamato in causa esattamente nella situazione in cui è meno capace di dire qualcosa.

Il fenomeno ha un nome in statistica, si chiama selezione, e compare ogni volta che si giudica uno strumento sui casi che lo strumento stesso ha filtrato. Un esame di ammissione sembra poco discriminante se lo si valuta soltanto sui candidati che sono finiti in lista d'attesa; ma quelli sono, per costruzione, i più simili fra loro. Lo spareggio è nella stessa condizione.

Il numero è sostanzioso. Due arcieri identici da 690 punti finiscono cinque a cinque un match su cinque; man mano che si allontanano la probabilità cala, e a venti punti di distacco è già scesa a un match su dieci. Se si mette insieme tutto questo (quanto sono distanti le coppie che si incontrano, e quanto spesso ciascuna finisce in parità) si ottiene la cosa che davvero interessa: quanto vale lo spareggio non in generale, ma nelle situazioni in cui viene usato.

Il divario medio fra le coppie che a uno spareggio ci arrivano davvero sta fra i nove e i quattordici punti su settantadue frecce, a seconda di quanto è largo il campo. E lo spareggio, in quelle situazioni, indica il più preciso fra il cinquantacinque e mezzo e il cinquantasette per cento delle volte. I campi usati per

questo conto sono costruiti a tavolino con due sole manopole dichiarate (il livello medio e l'estensione della griglia) e non provengono da nessuna gara reale.



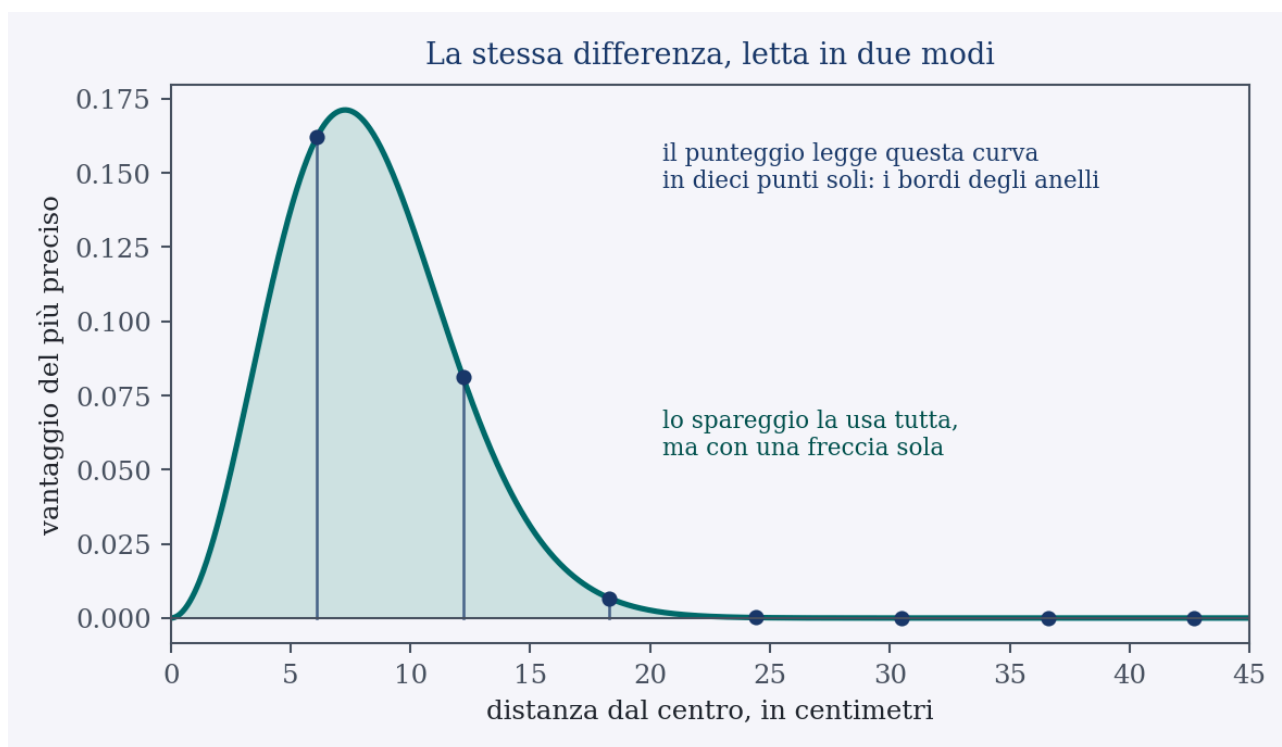
Quante volte lo spareggio indica il più preciso, al crescere del divario. Nullo a parità, cresce lentamente; la banda è l'escursione sulle nove forme di nuvola messe alla prova. Il punto dorato è il divario tipico delle coppie che a uno spareggio ci arrivano.

È il primo risultato del lavoro, e conviene dirlo senza addolcirlo: lo spareggio è quasi un lancio di moneta non perché legga male la freccia, ma perché viene chiamato in causa esattamente quando non c'è quasi niente da leggere. La selezione lavora contro di lui. Se gli spareggi capitassero fra arcieri estratti a caso dal campo indicherebbe il più preciso fra il cinquantasette e il sessantuno per cento delle volte, a seconda di quanto il campo è largo: poco, ma qualcosa. Capitando fra arcieri arrivati in parità, scende a poco più di cinquantacinque.

Perché il punteggio e lo spareggio vedono la stessa cosa in modo diverso

A questo punto sorge una domanda che sembra oziosa e invece è il cuore della faccenda. Come fa una regola a essere così più informativa dell'altra, se l'oggetto che guardano è lo stesso arciere?

La risposta sta in una curva sola, che vale la pena costruire a parole prima di guardarla. Prendiamo i due arcieri e chiediamoci, per ogni distanza dal centro, quanto più spesso il più preciso cada dentro quella distanza rispetto all'altro. Vicinissimo al centro la differenza è piccola, perché nessuno dei due ci arriva spesso; molto lontano è di nuovo piccola, perché a quel punto ci arrivano entrambi. In mezzo c'è una gobba: la zona in cui il gruppo più stretto si distingue davvero. Chiamiamola curva del vantaggio.



La curva del vantaggio del più preciso, in funzione della distanza dal centro. I punti blu sono i dieci bordi degli anelli: sono le sole letture che il punteggio ricava da questa curva.

Ora la cosa notevole, e per vederla serve un modo insolito ma esatto di guardare il punteggio: il valore di una freccia è il numero di cerchi dentro cui è finita. Un dieci è una freccia dentro tutti e dieci i cerchi; un sette è dentro sette; una fuori dal bersaglio è dentro zero. Contare i punti e contare i cerchi sono la stessa operazione.

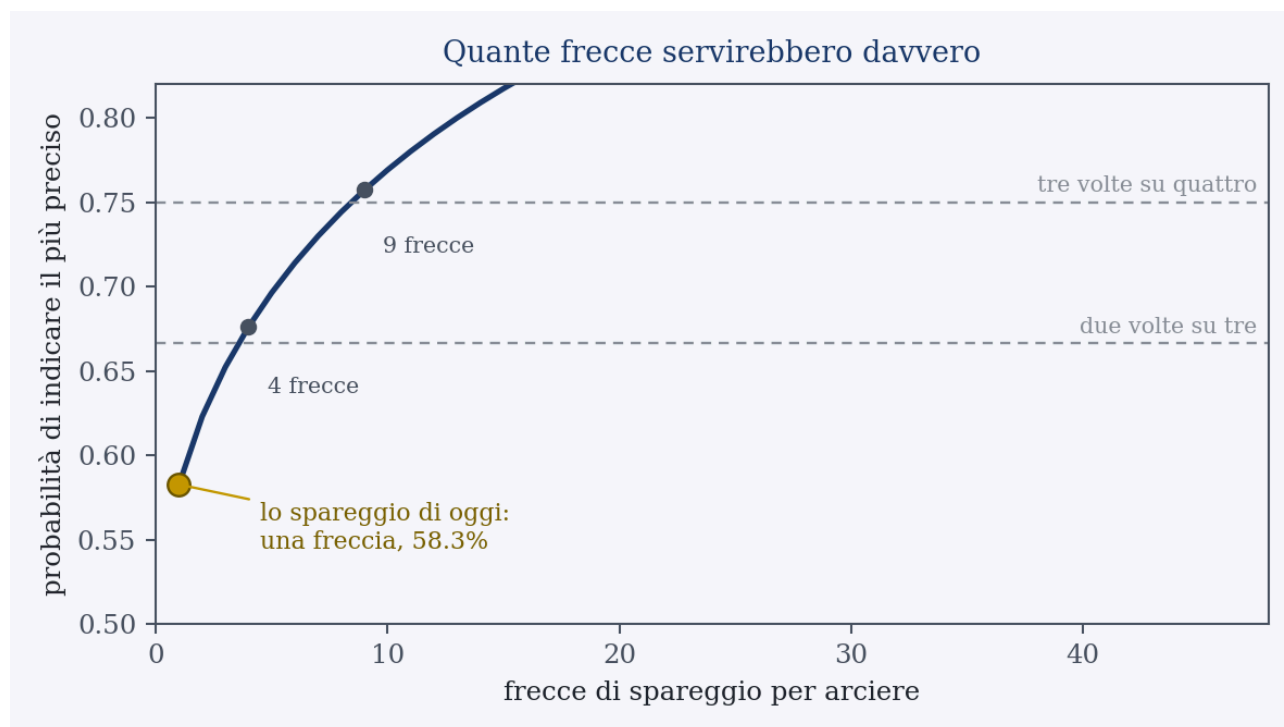
Ne segue subito una conseguenza. Se il punteggio è un conteggio di cerchi, allora il punteggio medio di un arciere è la somma, sui dieci cerchi, della frequenza con cui ci finisce dentro. Per un arciere da 690 quella somma fa 9,5833 punti a freccia, che moltiplicati per settantadue danno esattamente 690: non un'approssimazione, un'identità. E il vantaggio in punti per freccia fra due arcieri è la differenza fra quelle dieci frequenze, cioè la somma delle dieci altezze segnate in figura, che moltiplicata per settantadue dà il divario in classifica. Il punteggio non è altro che questa curva letta in dieci punti soltanto: i bordi degli anelli.

Lo spareggio, invece, non legge dieci punti: usa la curva intera, dal centro al bordo, senza saltarne un pezzo. Il che rende il risultato ancora più severo di come appariva, perché lo spareggio non guarda una versione impoverita dell'informazione: guarda la stessa curva, e la guarda meglio del punteggio. Perde comunque, e perde per un motivo che con la lettura non c'entra: il punteggio ha settantadue frecce per stimare quelle dieci altezze, lo spareggio ne ha una per stimare tutta la curva. Non è una questione di risoluzione dello strumento, è una questione di quante volte lo si usa.

E c'è un dividendo, che spiega perché tutti i numeri di questo lavoro siano così stabili. Poiché le due grandezze sono due letture della stessa curva, fissato il divario in punti resta fissata anche la curva, e con essa l'esito dello spareggio. È il motivo per cui, come vedremo più avanti, deformare la nuvola in tutti i modi plausibili sposta la risposta di poco.

Quante frecce servirebbero davvero

Se il difetto è la numerosità, la domanda successiva viene da sé: quante frecce ci vorrebbero? La cosa elegante è che lo spareggio a una freccia è il primo gradino di una scala che si calcola per intero, e ogni gradino è il massimo teorico raggiungibile con quel numero di frecce. Nessuna regola, per quanto astuta, può fare meglio.



Quanto sale l'affidabilità aggiungendo frecce di spareggio, per una coppia distante dodici punti su settantadue frecce, il caso tipico. Ogni valore è il massimo teorico con quel numero di frecce.

Per una coppia distante dodici punti, che è il divario tipico di chi arriva a uno spareggio, la scala dice questo. Una freccia: cinquantotto volte su cento. Due frecce: sessantadue. Tre frecce, cioè una volata sola: sessantacinque. Nel tiro alternato delle finali, dove ciascuno ha venti secondi a freccia, due frecce in più a testa sono quattro tiri, cioè poco più di un minuto di orologio oltre ai tempi di gestione. Per arrivare a due volte su tre ne servono quattro, per tre volte su quattro ne servono nove.

Il salto più redditizio, come sempre in queste curve, è il primo: la seconda e la terza freccia valgono ciascuna più di qualunque freccia successiva, e da sole recuperano i due quinti del terreno che si guadagnerebbe arrivando a nove. Poi la curva si appiattisce, e lo fa secondo una legge che governa allo stesso modo i sondaggi, le misure di laboratorio e qualunque cosa si stimi ripetendo un'osservazione: la precisione cresce come la radice quadrata del numero di prove, sicché per raddoppiare il vantaggio sopra il puro caso servono quattro volte le frecce. Il conto lo conferma fin dove può: da una a quattro frecce il vantaggio raddoppia, da quattro a sedici quasi. Poi la legge smette di valere, e non per un difetto del conto: quella legge vale soltanto finché il vantaggio è piccolo, e a sedici frecce siamo già vicini al soffitto. Raddoppiare ancora significherebbe indovinare più di cento volte su cento, e nessun numero di frecce lo consente: a sessantaquattro il vantaggio cresce solo di un altro quarantacinque per cento, e da lì in poi si guadagnano decimi.

Non è una proposta di regolamento, perché questa non è la sede: è il prezzo di listino, dichiarato, di ciò che si compra con ogni freccia aggiunta.

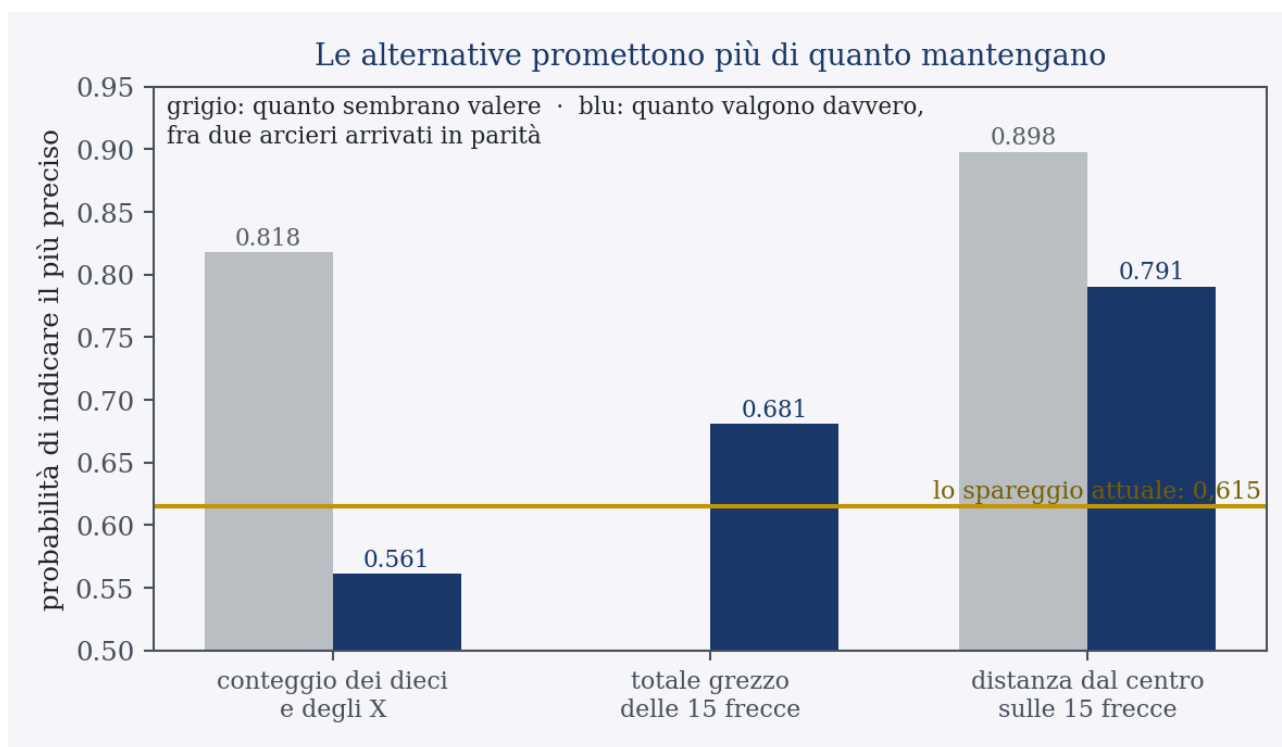
Le quindici frecce che sono già sul bersaglio

Aggiungere frecce costa tempo, e chi organizza una finale televisiva ha ragione a difenderlo. Ma c'è una strada che tempo non ne costa affatto, ed è la più interessante di tutte: quando due arcieri arrivano a uno spareggio hanno già tirato quindici frecce a testa, tutte registrate, tutte sul bersaglio. Perché non usare quelle?

L'idea è buona e la trappola è profonda. Quelle quindici frecce sono già state spese: essere arrivati in parità significa, per definizione, che i due hanno prodotto profili quasi identici. Chiedere a quelle stesse frecce di rompere la parità che loro stesse hanno creato è molto meno redditizio di quanto sembri, e chi fa il conto in modo ingenuo si prende un abbaglio clamoroso.

Il caso più istruttivo è il conteggio dei dieci e degli X, che è anche il criterio che il vecchio regolamento usava e che molti proporrebbero d'istinto. Se lo si calcola sui due arcieri senza tener conto di come sono arrivati fin lì, sembra valere ottantadue volte su cento: un ottimo strumento. Se lo si calcola sugli stessi due arcieri sapendo che il match è finito cinque pari, ne vale cinquantasei, cioè peggio dello spareggio che vorrebbe sostituire. Sono gli stessi arcieri e la stessa regola: cambia solo che la seconda volta si tiene conto del fatto che quelle frecce hanno già prodotto una parità.

Vale la pena vedere quanto sia potente questo filtro, perché messo in cifre diventa evidente. Per la coppia di riferimento, senza condizionare, il numero di dieci realizzati nelle quindici frecce differisce in media di tre e coincide in un caso su dieci; fra i soli match finiti cinque pari differisce in media di uno e coincide in quasi un caso su tre. Non è che il conteggio dei dieci sia un cattivo criterio in sé: è che, arrivati a quel punto del match, non ha quasi più niente da dire, perché quel che aveva da dire lo ha già detto nei cinque set.



Quanto valgono le alternative che non costano una freccia in più, per una coppia di riferimento distante diciotto punti. In grigio il valore calcolato senza tener conto di come il match è finito; in blu quello calcolato sapendo che è finito in parità. Sono gli stessi arcieri.

Sopravvive una cosa sola, ed è quella che il tabellone già conosce senza usarla. La regola è precisa e vale la pena enunciarla: si sommano i quadrati delle distanze dal centro delle quindici frecce, e vince il totale più piccolo. Il quadrato, e non la distanza semplice, perché è quella la grandezza che il modello indica come la lettura ottimale delle quindici frecce, per la stessa ragione per cui a una freccia sola la lettura ottimale è la più vicina al centro.

Il motivo per cui funziona è che il punteggio censura. Due arcieri con lo stesso identico profilo di anelli hanno esaurito tutta l'informazione contenuta nei punteggi, ma non quella contenuta nella posizione della freccia dentro l'anello: un dieci al bordo e un dieci a un centimetro dal centro valgono lo stesso punto e non sono la stessa cosa. Misurando la distanza dal centro di tutte e quindici le frecce del match si arriva, per una coppia distante diciotto punti, a settantanove volte su cento contro le sessantadue dello spareggio; e per la coppia più stretta di dodici punti, che è il caso tipico, a settantadue contro cinquantotto. Il guadagno resta fra quattordici e diciotto punti percentuali a seconda della coppia.

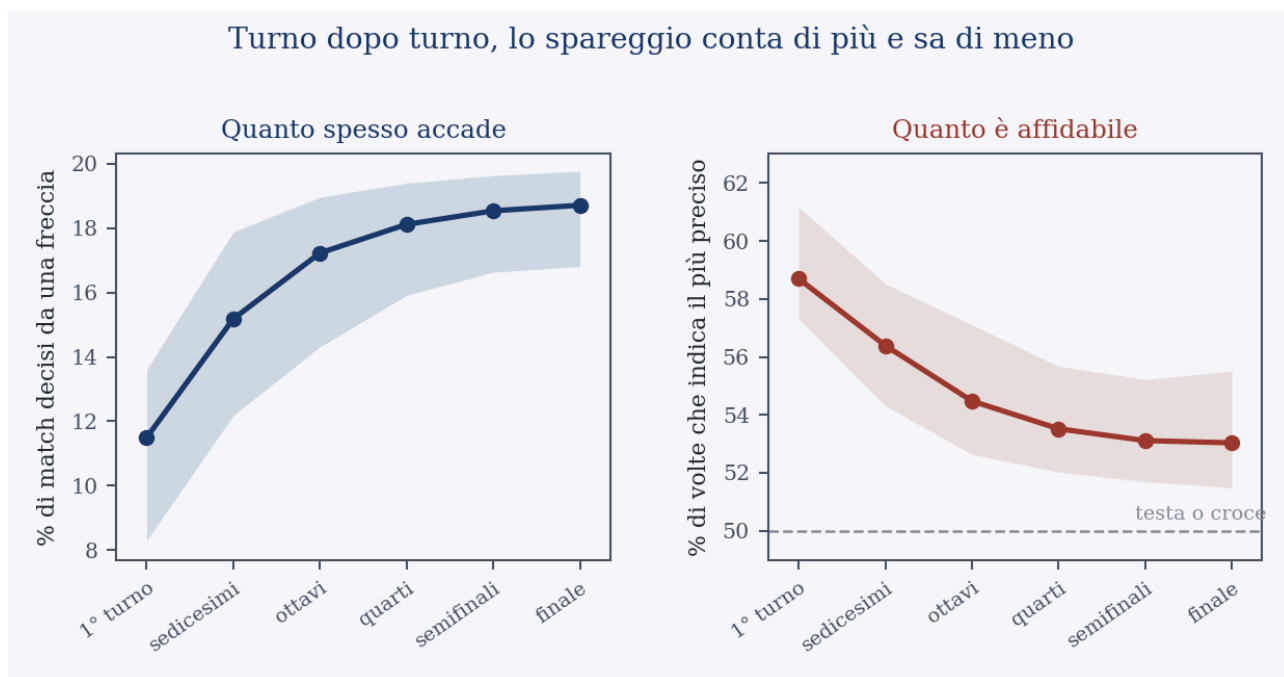
E qui sta la conclusione più concreta di tutto il lavoro. Nelle finali internazionali dove sono stati impiegati sistemi ottici di rilevamento, la posizione di ogni freccia è stata registrata e la regola l'ha buttata via. Va però detto con precisione: il regolamento impone il cartellino elettronico, non la registrazione delle coordinate d'impatto. La fattibilità è documentata da sistemi già usati in gara, non è una proprietà di ogni bersaglio a lettura elettronica.

Il tabellone: dove conta di più, sa di meno

Finora abbiamo guardato un match alla volta. Ma una gara olimpica è un tabellone: sessantaquattro arcieri, sessantatré match, sei vittorie consecutive per l'oro. Mettendo insieme la macchina del tabellone e

quella dello spareggio si ottiene un quadro che nessuno dei due pezzi produce da solo.

Il campo va dichiarato, perché il risultato dipende da come sono distribuiti i sessantaquattro: qui la prima testa di serie è staccata di quattro punti dalla seconda, e da lì i punteggi scendono lungo la griglia coprendo un'estensione di quaranta punti. Le bande che seguono sono l'escursione su dodici campi diversi per forma ed estensione. In un tabellone tipico, il set system manda a spareggio fra gli otto e i dieci match sui sessantatré, cioè poco meno del doppio di quelli che vi manderebbe il punteggio cumulativo. Ma la cosa importante non è il totale: è come si distribuiscono.



Turno dopo turno, la frequenza degli spareggi sale e la loro affidabilità scende. La causa è la stessa: il tabellone elimina i più deboli, e chi resta si somiglia sempre di più. La banda è l'escursione su dodici campi diversi per forma ed estensione.

Al primo turno finisce a spareggio poco più di un match su dieci, e lì lo spareggio indica il più preciso fra il cinquantasette e il sessantuno per cento delle volte. Nella finale per l'oro finisce a spareggio poco meno di un match su cinque, e lì lo spareggio indica il più preciso fra il cinquantuno e mezzo e il cinquantacinque e mezzo. Le due curve si muovono in direzioni opposte per la stessa ragione: il tabellone è un filtro, elimina progressivamente i più deboli, e chi arriva in fondo si somiglia sempre di più. Il divario medio fra i due contendenti scende da quindici punti al primo turno a cinque in finale.

Tradotto: nel modello, una finale per l'oro su cinque circa si decide con una freccia sola, e quella freccia indovina il più preciso poco più di cinquantatré volte su cento. È la peggiore combinazione immaginabile fra importanza e affidabilità, e non è un caso sfortunato: è una conseguenza strutturale di come è fatto un tabellone a eliminazione diretta.

Quanto dipende dalle ipotesi: le forme messe alla prova

Uno scettico, arrivato qui, ha un'obiezione buona. L'impianto presuppone una nuvola tonda e centrata esattamente dove si mira, mentre i gruppi reali tendono all'ovale, capita che siano scenterati, e ogni tanto

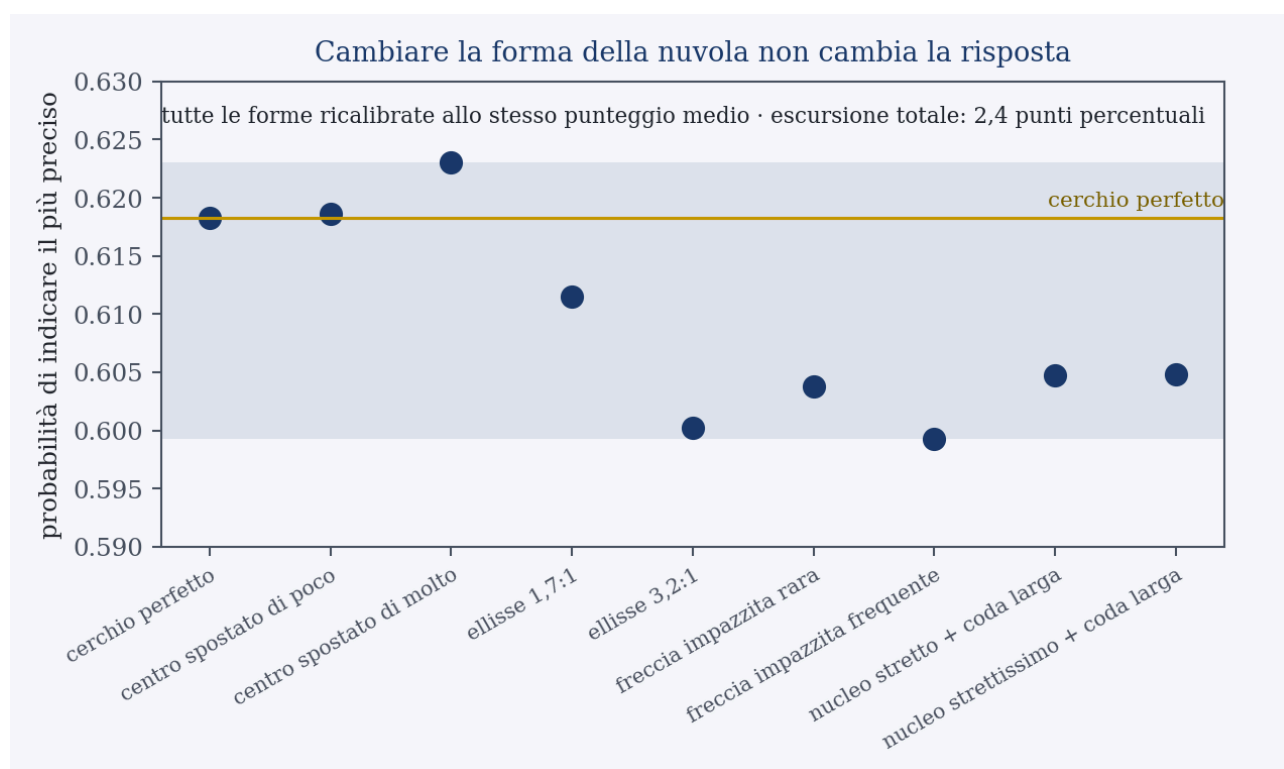
ospitano un tiro che non c'entra niente con gli altri. Peggio: il punteggio fissa la nuvola ai bordi degli anelli e non dice quasi nulla su come le frecce si distribuiscano dentro il dieci, che è esattamente la zona dove lo spareggio si decide.

L'obiezione è fondata, e per questo il lavoro non stima: delimita. Invece di scegliere una forma e affidarsi a quella, si calcola la risposta sotto tutte le forme plausibili (ellissi fino a tre volte più lunghe che larghe, centri spostati di un'ampiezza intera, nuvole che producono la freccia completamente impazzita, nuclei strettissimi con coda larga) e si riporta la banda invece del punto.

Su una di queste forme conviene fermarsi, perché descrive un arciere che chiunque frequenti un campo riconosce. La curva a campana è severissima sugli errori grandi: per un arciere da 690 punti prevede una freccia peggiore del sette una volta ogni tre milioni, cioè mai in una carriera. Esistono però nuvole con la stessa ampiezza tipica in cui quei disastri sono molto meno rari (si chiamano, in gergo, distribuzioni a coda pesante) e lì la stessa freccia arriva una volta ogni centosettanta tiri, cioè circa una ogni due gare e mezzo. È l'arciere che tira meglio di tutti per settanta frecce e poi ne butta via una, senza una ragione visibile.

La cosa interessante è che, dovendo comunque valere 690 punti, quell'arciere deve compensare: il suo nucleo è più stretto. Mette nel dieci il sessantasette per cento delle frecce contro il sessantuno di chi tira a campana, e nell'X il ventinove contro il ventuno. Non è un arciere peggiore né migliore: è fatto in un altro modo, ed è esattamente il tipo di differenza che una prova di robustezza deve saper assorbire.

Il modo di condurre una prova simile va spiegato, perché nasconde una trappola in cui si cade con naturalezza. Cambiare la forma della nuvola è solo metà dell'operazione: subito dopo va riportata al punteggio di partenza, stringendola o allargandola quanto serve. Chi salta quel passaggio ottiene un arciere che non è soltanto diverso ma anche più debole, e finisce per attribuire alla forma della nuvola un effetto che è semplicemente un calo di livello.



La stessa domanda posta a nove forme diverse della nuvola di impatti, tutte ricalibrate allo stesso punteggio medio. L'intera escursione sta in due punti percentuali e quattro decimi.

Il risultato è che la forma sposta poco. Da un cerchio perfetto a un'ellisse tre volte più lunga che larga, passando per centri spostati e code pesanti, la risposta si muove di due punti percentuali e quattro decimi in tutto. È un'oscillazione che non va nascosta, perché rispetto al vantaggio complessivo sopra il puro caso non è trascurabile; ma nessuna delle forme provate porta lo spareggio anche solo vicino a essere uno strumento affidabile, e nessuna lo porta al puro caso. In tutte le famiglie testate resta ciò che è: uno strumento debole.

Il motivo di tanta stabilità lo abbiamo già visto: punteggio e spareggio sono due letture della stessa curva del vantaggio, e fissare il divario in punti significa fissare la curva. Non è una fortuna, è una conseguenza.

Va detta anche la strada che non si può percorrere. Verrebbe da chiedersi se non si possa evitare tutto il modello e ricavare la risposta dai dati pubblici, contando quante frecce di ogni anello compaiono nei risultati delle gare. Non funziona, e il conto dice esattamente perché: dai soli conteggi di anello la risposta resta indeterminata dentro una forchetta larga quarantatré punti percentuali, che non serve a nulla, e suddividere il centro in cerchi sempre più fini non la stringe. Lavorare per delimitazione non è una scelta di comodo: è l'unica strada disponibile.

Ciò che il modello non vede

Viene ora la parte che conta di più, e riguarda tutto quello che il modello ha scelto di ignorare. Nel modello ogni tiro nasce isolato dagli altri, pescato ogni volta dalla stessa nuvola immutabile: non c'è tensione che monta, non c'è braccio che si stanca, non c'è la volata in cui tutto si sfascia. E questa volta il limite morde più che altrove, perché la freccia di spareggio non è una freccia qualsiasi: è la più carica che esista in questo sport, tirata sapendo che dopo non c'è nient'altro.

Che sia distribuita come le quindici precedenti è un'ipotesi forte, e c'è evidenza che sia falsa: chi ha confrontato le frecce di spareggio con quelle del match su gare vere ha trovato un calo di rendimento proprio lì, e in quel lavoro l'amplificazione nelle competizioni che contano di più emerge soltanto per le donne. Studi successivi indicano una marcata eterogeneità individuale e contestuale. Che il calo esista è documentato; quanto valga, da che cosa dipenda e a chi si applichi restano domande aperte, e il conto di queste pagine non le chiude. Ma sapere che c'è basta a orientare la lettura di tutto il resto.

Perché la direzione in cui l'errore spinge dipende da come la pressione agisce, e qui il conto è istruttivo. Se allargasse i due gruppi in proporzione (entrambi del venti per cento, poniamo) non cambierebbe assolutamente nulla, perché lo spareggio dipende soltanto dal rapporto fra le due nuvole e non dalla loro grandezza. Se invece aggiunge a ciascuno una quota di errore propria, come è più naturale pensare, allora le due nuvole si assomigliano di più di quanto gli arcieri si assomiglino, e lo spareggio diventa ancora meno informativo di quanto qui calcolato. Se invece esiste davvero una qualità separata (la freddezza, il colpo sotto pressione) allora lo spareggio misura quella, e misura bene qualcosa di diverso dalla precisione: non uno strumento impreciso, ma uno strumento puntato altrove. Il modello non può distinguere i due casi, e chiunque affermi il secondo ha l'onere di misurarlo.

Si può però fare di meglio che dichiarare il limite: si può misurarlo. Se la pressione aggiunge a entrambi gli arcieri una quota di errore, quella quota si può mettere nel conto e si può vedere di quanto sposta la risposta. Conviene esprimerla in una valuta comprensibile: diciamo che la freccia di spareggio, sotto pressione, si comporta come quella di un arciere più debole di un certo numero di punti. Un calo di dieci punti significa che il migliore dei due, al momento di tirare quella freccia, vale 680 invece di 690.

Il risultato è più solido di quanto ci si aspetterebbe. Per la coppia tipica, distante dodici punti, lo spareggio senza pressione indica il più preciso 58,3 volte su cento. Con un calo di dieci punti scende a 56,5; con venti punti a 55,2; con trenta a 54,3. Un calo di trenta punti è enorme, e nel modello separa due arcieri di livello nettamente diverso; costa quattro punti percentuali su un vantaggio iniziale di poco più di otto.

Il conto inverso lo dice ancora meglio. Perché lo spareggio scenda a cinquantacinque su cento servirebbe un calo di ventidue punti; per arrivare a cinquantadue ne servirebbero settantotto; e per ridurlo a un lancio di moneta vero, cinquantuno su cento, ne servirebbero centoquaranta. Un calo di centoquaranta punti vorrebbe dire che un arciere da 690 tira, in quel momento, come uno da 550. È un ordine di grandezza che nel modello non ha alcun riscontro plausibile.

Lo stesso vale per i due numeri di testa. La probabilità pesata, quella che vale poco più di cinquantacinque su cento, scende a 54,6 con un calo di dieci punti e a 53,8 con venti. La finale per l'oro passa da 53,5 a 52,7 e poi a 52,1. La pressione erode, non ribalta.

La conclusione che se ne ricava è duplice, e vale la pena tenerle separate. La prima è che il limite dichiarato è reale e spinge nella direzione peggiore: tenerne conto rende lo spareggio meno informativo, non più. La seconda è che non lo rende abbastanza meno informativo da cambiare la storia — per annullare il potere discriminante servirebbe un crollo di ordini di grandezza fuori scala. Il risultato del lavoro non è quindi appeso all'ipotesi di indipendenza: sopravvive alla sua violazione negli scenari calcolati qui, che sono quelli in cui la pressione colpisce i due arcieri allo stesso modo: lì il potere discriminante resta invariato o diminuisce, mai aumenta. Se invece i due rispondessero alla pressione in modo diverso, il segno dell'effetto non sarebbe determinato dal modello, e stabilirlo richiederebbe misure sul campo.

Resta un caso che il conto non copre, ed è giusto dirlo. Se la pressione non agisse allo stesso modo sui due arcieri — se uno reggesse e l'altro no — l'effetto potrebbe andare in entrambe le direzioni, e potrebbe perfino aumentare il potere discriminante dello spareggio, che a quel punto misurerebbe la tenuta invece della precisione. È la stessa possibilità di poco sopra, e vale la stessa risposta: il modello non la esclude e non la dimostra, e chi la sostiene ha l'onere di misurarla.

I limiti

Ci sono altri tre confini da dichiarare, e vale la pena metterli in fila perché delimitano ciò che queste pagine possono e non possono sostenere.

Il primo: la bravura qui è una sola quantità, l'ampiezza del gruppo, ed è una semplificazione dichiarata in anticipo. Un arciere è anche la sua tenuta sul lungo, la sua gestione del vento, la sua capacità di riprendersi da un turno storto, e nulla di tutto questo compare nei conti.

Il secondo riguarda il confronto fra regole: qui cambia l'aritmetica, non il comportamento. Con uno spareggio diverso gli arcieri probabilmente tirerebbero in modo diverso, magari già dal primo set, mentre il

conto lascia le frecce dove sono e modifica soltanto il criterio con cui vengono lette. È un limite comune a tutte le analisi controfattuali dei regolamenti sportivi, e va tenuto presente ogni volta che si legge un «sarebbe successo che».

Il terzo, il più sottile: «chi era davvero il più forte» in un dato incontro non è osservabile da quell'incontro. Con molte gare e un modello dichiarato si può stimare quale dei due abbia il gruppo più stretto, e con quanta incertezza; ciò che non si ottiene mai è la certezza su quel singolo giorno, che resta la risposta a una domanda controfattuale.

Va quindi letto per quello che è: uno studio di modello. Descrive il comportamento dello strumento in astratto, e non pretende di dire che cosa quello strumento abbia registrato in una gara precisa. Un lavoro che misurasse i margini reali degli spareggi disputati, quanti millimetri separano davvero le due frecce, sarebbe uno studio diverso, richiederebbe le coordinate registrate dai bersagli elettronici, e resta da fare.

Che cosa portarsi a casa

Per l'arciere. Perdere uno spareggio non è un verdetto sul vostro valore, ed è il caso di prenderlo alla lettera: nelle situazioni in cui gli spareggi capitano, quella freccia indica il più preciso poco più di cinquantacinque volte su cento, e in una finale cinquantatré. Significa che perdere uno spareggio contro un avversario di livello vicinissimo è un evento che accade quasi metà delle volte anche quando il gruppo più stretto è il vostro. Allenare il colpo di spareggio ha senso per mille ragioni; ma un singolo esito, da solo, non basta a fondare una diagnosi tecnica: è un indizio da mettere accanto al video, alle sensazioni e allo storico, non una conclusione.

Per l'istruttore. Uno spareggio è il campione più piccolo che esista in questo sport, e va trattato di conseguenza: una freccia. Nessun piano di lavoro dovrebbe cambiare per il solo esito di uno spareggio, in nessuna direzione, il che non toglie che quella freccia possa valere come indizio insieme ad altri. E vale la pena avere in testa l'ordine di grandezza, perché quella freccia diventi affidabile al sessanta per cento servono quasi quindici punti di divario su settantadue frecce, perché rende immediatamente evidente quanto poco si possa leggere in un singolo tiro.

Per chi scrive i regolamenti. Il difetto non è nella regola, che è già la migliore lettura possibile di quella freccia, ma nella numerosità. Le due strade per rimediare hanno prezzi molto diversi, e conviene confrontarle sulla stessa coppia di arcieri, quella distante dodici punti, il caso tipico. Aggiungere due frecce a testa costa poco più di un minuto di tiro alternato, più i tempi di gestione, e porta l'affidabilità da cinquantotto a sessantacinque su cento. Leggere la distanza dal centro delle quindici frecce già tirate non costa nulla in tempo di tiro e porta a settantadue, ma non è gratuita: richiede bersagli che registrino le coordinate con accuratezza sufficiente, e con essi una procedura di calibrazione, di verifica e di ricorso, oltre a una regola di riserva per quando il sistema non funziona. È un costo regolamentare e tecnologico invece che temporale, e va contato come tale.

Una freccia sola, nel punto sbagliato

Il quadro che emerge è sobrio e un po' scomodo. Lo spareggio non è una lotteria: porta informazione, e la porta nel modo migliore possibile date le sue premesse. Ma le sue premesse sono una freccia sola, chiesta di arbitrare fra due persone che si somigliano al punto da essere finite in parità, e in quelle condizioni la migliore lettura possibile di una freccia sola vale poco più di un lancio di moneta.

La cosa che pesa di più non è nemmeno il numero, ma dove cade. Uno strumento debole è tollerabile se lo si usa dove le decisioni contano poco; qui accade il contrario, e per costruzione: più il tabellone avanza, più gli spareggi diventano frequenti e meno diventano affidabili, finché nella finale per l'oro si arriva a una freccia che decide quasi un match su cinque sapendo distinguere i due contendenti cinquantatré volte su cento.

C'è però un modo più utile di leggere tutto questo, e non è un'accusa al regolamento. Uno spareggio non pretende di misurare: pretende di chiudere. Serve a mettere un punto dove il formato non ne ha più, davanti a un pubblico e a un orario, e quel compito lo assolve perfettamente: è rapido, è comprensibile, è incontestabile a occhio nudo. Il malinteso nasce quando si scambia la chiusura per un verdetto, e si legge in quella freccia una gerarchia che quella freccia non può stabilire.

Distinguere le due cose non toglie niente allo sport, e toglie parecchio all'amarezza. Chi perde uno spareggio ha perso un sorteggio quasi equo, non un confronto tecnico, e se era lui il più preciso, ha perso un sorteggio che pendeva perfino un poco dalla sua parte. Chi lo vince ha vinto legittimamente un match, non un'argomentazione sulla propria superiorità. Sono due frasi che convivono senza contraddirsi, e il conto serve esattamente a tenerle separate.

Resta un'ultima considerazione, ed è quella che rende il problema risolvibile invece che tragico. La debolezza dello spareggio non nasce da qualcosa di misterioso: nasce dall'aver chiesto a un'unica osservazione ciò che quindici non erano riuscite a stabilire. I due rimedi possibili fanno, in fondo, la stessa cosa: portano la decisione da una sola osservazione a molte. Le due frecce aggiuntive aggiungendone di nuove, la lettura fine estraendo dalle quindici già tirate quello che il punteggio arrotondato aveva buttato via. Non serve una teoria nuova: serve smettere di decidere con una sola.

Nota su dati, fonti e metodo

Nessun dato di persone reali entra in queste pagine, e non servirebbe a nulla se ci entrasse. Non ci sono punteggi di arcieri esistenti, gare realmente disputate, nomi, classifiche ricostruite. Tutto viene da tre sorgenti pubbliche e impersonali: le misure del bersaglio, fissate dal regolamento; le regole dei due formati e dello spareggio, anch'esse regolamentari; e un modello statistico di come si distribuiscono i tiri attorno al punto di mira.

I punteggi che ricorrono — 690, 688, 678 — non sono di nessuno. Servono a collocare il ragionamento alla quota in cui si tira per davvero, come quando in un problema di meccanica si prende un corpo di un chilogrammo: non esiste quel corpo, esiste la scala.

Qui non si simula mai. Le quantità sono ottenute in forma chiusa dove esiste, e altrove per quadratura numerica deterministica, con la tolleranza dichiarata e verificata per convergenza. Deterministico non

vuol dire esatto: una quadratura ha un errore di discretizzazione, per quanto controllato. Vuol dire che chi rifacesse il conto domani otterrebbe le stesse cifre, senza alcuna variabilità di campionamento. Dove la forma chiusa non esiste, come per le nuvole ellittiche o le misture, si integra numericamente su griglia deterministica, dichiarando il passo e verificando che dimezzarlo non sposti il risultato. I numeri che riguardano il singolo match (la scala delle frecce, le soglie di distinguibilità, il crollo delle alternative, la classe delle forme) sono stati ricalcolati da una seconda implementazione indipendente, scritta separatamente a partire dalla stessa specifica matematica, e controllati contro un campionamento casuale usato come verifica esterna e mai come fonte. Anche i numeri che riguardano il tabellone sono stati replicati da quella seconda implementazione, costruita sopra un modulo di torneo indipendente, e riprodotti sulle quattro forme di campo; sono comunque riportati come bande, perché dipendono dalla composizione del campo e non da un unico scenario.

Le regole di gara qui descritte — formato a set, punteggio cumulativo, spareggio a freccia singola e tempi di tiro — sono quelle del regolamento World Archery in vigore. L'unico risultato non prodotto qui è il calo di rendimento negli spareggi richiamato fra i limiti: viene da un'analisi su dati di gara già pubblicata, è richiamato per orientare la lettura e non entra in alcun calcolo di queste pagine.

Il pacchetto allegato contiene il codice, la specifica matematica e i test: è pensato perché un lettore possa ripetere ogni calcolo, smentirlo o portarlo altrove. Le segnalazioni di errore sono benvenute, e i recapiti stanno sul sito.

Appendice matematica

Il saggio mostra una formula sola, quella che traduce l'ampiezza di un gruppo nella probabilità di cadere entro una certa distanza dal centro. È una scelta deliberata: è l'unica di cui serva la vista per capire da dove viene tutto il resto.

Qui ci sono le ventisei formule che il motore valuta per produrre ogni numero stampato in quelle pagine. Sono la traduzione completa, con abbastanza contesto perché un lettore che non fa il matematico di mestiere capisca che cosa dice ciascuna, perché è fatta così, e che cosa non è in grado di dire. Chi volesse soltanto ricalcolare può saltare la prosa e prendere le formule; chi volesse capire come funziona una misura di questo tipo troverà che la prosa è la parte utile.

Come è fatta ogni voce

Ogni formula ha almeno quattro parti. In parole dice che cosa si calcola, senza simboli. La formula la mostra. Da dove viene ricostruisce il passaggio che la genera, di solito in due o tre righe. Un numero la applica a un caso concreto, quasi sempre l'arciere da 690 punti o la coppia 688 contro 670 che il saggio usa come esempio ricorrente, così che ogni formula abbia almeno un valore verificabile. Dove serve, una riga in chiusura elenca che cosa non copre: i confini oltre i quali quella formula smette di valere.

Notazione e unità

Il lavoro attraversa tre unità di misura, e confonderle è il modo più rapido di ottenere numeri assurdi. La geometria del bersaglio è in centimetri sul piano del bersaglio. Il motore lavora in milliradiani, cioè in angoli, perché così le formule valgono a qualunque distanza. Il saggio parla in centimetri, perché è la

lingua in cui un arciero guarda il proprio gruppo. Il ponte è semplice: a settanta metri un milliradiante sottende sette centimetri.

Una parola merita attenzione perché potrebbe indicare due cose e ne indica una sola. «Ampiezza» è sempre la larghezza della nuvola di un arciero, mai altro; quando si parla di quanto sono distribuiti i punteggi dei sessantaquattro arcieri di un tabellone si dice «estensione del campo».

simbo- lo	che cosa è
σ	ampiezza della nuvola: la deviazione standard degli impatti per asse. Non il raggio del gruppo, non il suo diametro.
r, ρ	distanza dal centro. r in centimetri, ρ in milliradiani.
R	distanza dal centro di una singola freccia già tirata; $F(r)$ ne è la funzione di ripartizione.
w	larghezza di un anello: 6,1 cm sulla faccia da 122 cm.
r_x	raggio della zona X: 3,05 cm, metà di un anello.
k	indice dell'anello, da 1 (il dieci) a 10 (l'anello esterno).
D	distanza di tiro, sempre 70 m in queste pagine.
$F(r)$	probabilità che una freccia cada entro il raggio r .
p_v	probabilità che una singola freccia valga esattamente v punti.
μ	punteggio atteso di una freccia; il totale su 72 frecce è 72μ .
$\Delta(r)$	funzione di vantaggio: quanto più spesso il più preciso cade entro r .
p_{so}	probabilità che lo spareggio indichi il più preciso.
c	rapporto fra le due ampiezze al quadrato, σ^2/σ'^2 .
S	punteggio di una volata di tre frecce.
π_{55}	probabilità che un match a set finisca cinque pari.
$\theta, g(\theta)$	angolo attorno al centro e peso angolare della nuvola ellittica (S21).
v	parametro che governa lo spessore delle code (S23): alto = campana, basso = code grosse.
j, u	indice del seed nel tabellone e variabile del profilo di campo (S25).
$I_x(a,b)$	funzione beta incompleta regolarizzata.

Le formule si leggono in ordine, perché ciascuna usa la precedente: nessuna dipende da una che venga dopo. Qualche voce rimanda in avanti, ma soltanto nelle righe che dichiarano che cosa non copre o perché conta, cioè per segnalare dove un caso particolare viene trattato, mai per servirsene.

gruppo	che cosa contiene
So1– So5	La geometria del bersaglio e il modello della nuvola: da centimetri ad angoli, che forma ha la dispersione, con quale probabilità esce ciascun punteggio.
So6– So8	Il ponte fra la nuvola e il punteggio, nei due versi, e la funzione di vantaggio che li tiene insieme.
So9– S13	Lo spareggio: la regola, la probabilità di indovinare, la dimostrazione di ottimalità, la soglia di distinguibilità, la scala delle frecce.
S14–S19	Il match e il condizionamento: volata, set, induzione all'indietro, probabilità di cinque pari, e le regole che riusano le frecce già tirate.
S20– S26	Robustezza e tornei: ricalibrazione, nuvole ellittiche, centri spostati, code pesanti, campi parametrici, propagazione sul tabellone, controllo negativo.

Parte prima — Il bersaglio e la nuvola

Cinque formule per dire due cose: com'è fatto il bersaglio, e come si descrive matematicamente un gruppo di frecce.

So1 • La geometria del volto

In parole. Il bersaglio da settanta metri è un disco di 122 cm di diametro diviso in dieci corone concentriche tutte della stessa larghezza. È questa uniformità che rende semplice tutto il resto: gli anelli non sono un elenco di numeri da ricordare, sono i multipli di un numero solo.

$$r_k = w \cdot k, \quad k = 1, \dots, 10 \quad v_k = 11 - k \quad w = 6,1 \text{ cm} \quad r_x = 3,05 \text{ cm}$$

Da dove viene. Il raggio esterno dell'anello k-esimo è k volte la larghezza w. Il valore che quell'anello attribuisce è 11 meno k: il primo anello vale dieci punti, il secondo nove, e via così fino al decimo che vale un punto. Al centro c'è un cerchio ulteriore di 3,05 cm di raggio, esattamente metà di un anello, che si chiama X: vale dieci punti come il resto della corona e serve, in altri contesti, a dirimere le parità.

Un numero. Il dieci ha raggio 6,1 cm; il nove arriva a 12,2 cm; il bordo del disco sta a 61 cm. Un arciero di vertice ha un gruppo la cui ampiezza è circa i tre quarti della larghezza di un solo anello.

So2 • La scala angolare

In parole. Un gruppo di frecce non ha una dimensione assoluta: ha una dimensione angolare. Lo stesso errore di mira produce un gruppo largo il doppio a distanza doppia. Lavorando in angoli invece che in centimetri, le formule valgono a qualunque distanza senza riscriverle.

$$\rho = r / D \text{ a } 70 \text{ m: } 1 \text{ mrad} = 7 \text{ cm}$$

Da dove viene. Un milliradiante è un millesimo di radiante, e per angoli piccoli un radiante a distanza D sottende D. Quindi, a distanza D metri, un milliradiante sottende D millimetri: a settanta metri, settanta millimetri, cioè sette centimetri.

Un numero. L'anello da 6,1 cm sottende 0,871 mrad a settanta metri. Il gruppo di un arciero da 690 punti misura 4,4613 cm, cioè 0,637 mrad.

So3 • La nuvola

In parole. Gli impatti di un arciere senza difetti sistematici si dispongono attorno al punto di mira come una campana in due dimensioni: fitti al centro, sempre più radi allontanandosi, e ugualmente in tutte le direzioni.

$$(x, y) \sim N(0, \sigma^2 I)$$

Da dove viene. È l'ipotesi standard per gli errori di misura, e discende dal fatto che l'errore finale è la somma di molte cause piccole e indipendenti — la mira, il rilascio, il vento, la freccia. La simmetria circolare aggiunge che nessuna direzione è privilegiata, il che vale per un arciere ben regolato e non per uno con un difetto noto.

Che cosa non copre. Nuvole ovali, centri spostati, tiri completamente fuori posto. Sono tutti casi trattati in S21, S22 e S23, e la conclusione del saggio è verificata anche lì.

So4 • La distanza dal centro

In parole. Il punteggio non dipende dalla posizione della freccia, ma solo da quanto è lontana dal centro. Serve quindi la probabilità che quella distanza sia inferiore a un dato raggio.

$$F(r) = P(R \leq r) = 1 - e^{-(r^2 / 2\sigma^2)}$$

Da dove viene. Se le due componenti dell'errore sono normali indipendenti con la stessa ampiezza, la distanza dal centro segue una distribuzione di Rayleigh. Si ottiene integrando la campana bidimensionale su un disco di raggio r : l'integrale ha forma chiusa proprio grazie alla simmetria circolare.

Un numero. Per l'arciere da 690 punti, la cui ampiezza vale 4,4613 cm, la probabilità di cadere entro il dieci è $F(6,1) = 0,607$; entro la zona X, $F(3,05) = 0,208$.

So5 • La probabilità di ogni punteggio

In parole. Una freccia vale k punti se cade fra il bordo interno e il bordo esterno dell'anello k -esimo. La probabilità di quel valore è quindi la differenza fra due probabilità di So4.

$$p_k = F(r_{11-k}) - F(r_{10-k}), \quad k = 1, \dots, 10 \quad p_0 = 1 - F(r_{10})$$

Da dove viene. È la definizione stessa di corona circolare: la probabilità di cadere in un anello è quella di cadere entro il suo bordo esterno meno quella di cadere entro il bordo interno. Il valore zero raccoglie tutto ciò che esce dal disco.

Un numero. Per l'arciere da 690 punti il dieci esce nel 60,7 per cento dei tiri, il nove nel 36,9 per cento, l'otto nel 2,4 per cento, e sotto l'otto praticamente mai — due volte su diecimila. Le undici probabilità sommano a uno per costruzione, ed è il primo controllo che il motore esegue.

Parte seconda — Dal punteggio all'ampiezza, e ritorno

Tre formule per costruire il ponte a doppio senso fra ciò che si vede sul tabellone e ciò che sta sul bersaglio. La terza è il contributo teorico del lavoro.

So6 • Il punteggio atteso come conteggio di cerchi

In parole. Il punteggio medio per freccia si può scrivere in due modi. Il primo è ovvio: si moltiplica ogni valore per la sua probabilità e si somma. Il secondo è meno ovvio e molto più utile: si sommano le dieci probabilità di cadere entro ciascun bordo.

$$\mu = \sum_k k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{10} F(r_k)$$

Da dove viene. Il valore di una freccia è il numero di cerchi dentro cui è finita: un dieci sta dentro tutti e dieci i cerchi, un sette dentro sette. Contare i punti e contare i cerchi è la stessa operazione, e scambiando l'ordine di somma si passa dalla prima scrittura alla seconda.

Un numero. Per l'arciere da 690 punti la seconda somma vale 9,5833 punti a freccia, che moltiplicati per settantadue danno esattamente 690 punti. Non è un'approssimazione: è un'identità, e il motore la verifica a ogni esecuzione.

So7 • L'inversione

In parole. La relazione fra ampiezza e punteggio è monotona: gruppo più stretto, punteggio più alto, sempre. Quindi si può percorrere al contrario, e a ogni punteggio medio atteso corrisponde una sola ampiezza.

$$\sigma(T) : 72 \cdot \mu(\sigma) = T, \text{ soluzione unica}$$

Da dove viene. La funzione che porta da σ a μ è continua e strettamente decrescente, perché allargare la nuvola riduce la probabilità di cadere entro ciascun bordo. Una funzione con queste proprietà ha inversa unica, che si trova numericamente per bisezione.

Un numero. Un totale di 700 punti corrisponde a un'ampiezza di 3,7817 cm; 690 punti a 4,4613 cm; 680 a 5,1375 cm; 670 a 5,8135 cm; 650 a 7,1654 cm. La pendenza attorno a 690 è di 0,68 millimetri per punto: è il fattore di conversione che il saggio usa a ogni pagina.

Che cosa non copre. Il punteggio di una singola gara è una realizzazione fra le tante, non il punteggio atteso. L'inversione lega l'ampiezza al valore medio, non a un risultato letto una volta sola.

So8 • La funzione di vantaggio e l'identità strutturale

In parole. Presi due arcieri, si guarda per ogni distanza dal centro quanto più spesso il più preciso cada entro quella distanza. Ne esce una curva che vale zero al centro, zero molto lontano, e ha una gobba in mezzo. Questa curva sola determina sia il divario in punti sia l'esito dello spareggio.

$$\Delta(r) = F_A(r) - F_B(r) \quad \Delta\mu = \sum_{k=1}^{10} \Delta(r_k) \quad p_{so} = 1/2 + \int \Delta(r) dF_A(r)$$

Da dove viene. La prima segue da So6 applicata a entrambi gli arcieri e sottratta. La seconda si ottiene scrivendo la probabilità che la freccia di A sia più vicina come integrale, e aggiungendo e sottraendo un mezzo. Il punto notevole è che le due grandezze sono due funzionali della stessa curva: il punteggio la legge in dieci punti, lo spareggio la integra tutta.

Un numero. Per la coppia 688 contro 670 la curva ha il massimo a 7,3 cm dal centro; la somma delle dieci altezze vale 0,2500 punti a freccia, cioè 18,0 punti su 72 frecce; e l'integrale dà una probabilità di 0,6153. Le due strade di calcolo convergono allo stesso valore, e l'errore residuo si dimezza dimezzando il passo di griglia — che è il modo corretto di verificare una quadratura.

Perché conta. È la ragione per cui i risultati del saggio sono così insensibili alla forma della nuvola: fissato il divario in punti, resta fissata la curva, e con essa l'integrale.

Parte terza — Lo spareggio

Cinque formule: la regola, quanto vale, perché è la lettura migliore possibile, quanto devono distare due arcieri perché funzioni, e che cosa succede aggiungendo frecce.

So9 • La regola

In parole. Ciascun arciere tira una freccia; vince quella più vicina al centro. Se il giudice non riesce a stabilire quale sia, si ripete.

$$\text{vince A} \Leftrightarrow R_A < R^B$$

Da dove viene. È il regolamento, non un modello. Va però notato che la formulazione storica — prima l'anello, poi la distanza — porta sempre allo stesso vincitore, perché gli anelli sono cerchi concentrici e una freccia più interna non può finire in un anello di valore inferiore. Le due scritture coincidono.

Che cosa non copre. Il caso in cui entrambe le frecce manchino la zona di punteggio, e quello in cui la misura non sia risolutiva: entrambi rimandano a una ripetizione, che il modello non rappresenta perché ha probabilità nulla su distribuzioni continue.

S10 • Quante volte indica il più preciso

In parole. La probabilità che vinca chi ha il gruppo più stretto dipende soltanto dal rapporto fra le due ampiezze, e ha una forma sorprendentemente semplice.

$$p_{so} = P(R_A < R^B) = \sigma^{B2} / (\sigma_A^2 + \sigma^{B2})$$

Da dove viene. Il quadrato della distanza dal centro, per una nuvola circolare, segue una distribuzione esponenziale il cui parametro è l'inverso di due volte l'ampiezza al quadrato. La probabilità che una variabile esponenziale sia minore di un'altra indipendente è il rapporto fra i parametri, e riordinando si ottiene la formula.

Un numero. La probabilità che lo spareggio indichi il più preciso vale 0,5365 fra un arciere da 690 punti e uno da 685; 0,5701 fra 690 e 680; 0,6153 fra 688 e 670; 0,7821 fra 700 e 650. Sono probabilità: 0,6153 vuol dire poco più di sessantuno volte su cento.

Perché conta. La formula è invariante di scala: moltiplicare entrambe le ampiezze per lo stesso fattore non la cambia. È il motivo per cui una pressione che allargasse proporzionalmente entrambi i gruppi non sposterebbe di nulla il potere discriminante.

S11 • Perché il più vicino al centro è la lettura ottima

In parole. Fra tutte le regole che si possono costruire su due frecce, nessuna fa meglio di quella attuale. E per applicarla non serve conoscere le ampiezze: basta sapere quale delle due è minore.

$$\log L_A - \log L_B = (R^{B2} - R^{A2}) \cdot (1/2\sigma_A^2 - 1/2\sigma_B^2)$$

Da dove viene. Si confrontano due ipotesi — «il più stretto è A» contro «il più stretto è B» — scrivendo la verosimiglianza dei dati osservati sotto ciascuna e prendendone il rapporto. Il secondo fattore è positivo esattamente quando σ_A è minore di σ_B , quindi il segno dell'intera espressione dipende soltanto dal primo: cioè da quale freccia è più vicina. Il criterio di Neyman e Pearson garantisce che il test di rapporto di verosimiglianza sia il più potente possibile.

Un numero. Fra un arciero da 690 punti e uno da 670, una freccia a un centimetro dal centro ha il sessantotto per cento di probabilità in più di venire dal primo; una a dodici centimetri ha due volte e mezzo la probabilità di venire dal secondo, e poco oltre i dodici e mezzo esattamente il triplo; la soglia di indifferenza cade a 7,2 cm. Ma la soglia non serve conoscerla, ed è questo il punto.

Un termine di paragone. Se il regolamento leggesse solo l'anello — vince chi fa il punteggio più alto, e a parità di anello si sorteggia — la stessa coppia 688 contro 670 darebbe 0,5955 invece di 0,6153. Sono due punti percentuali persi per aver buttato via la posizione della freccia dentro l'anello, ed è la misura di quanto valga il raffinamento che il regolamento attuale già adotta.

Che cosa non copre. L'ottimalità vale sotto il modello di S03. Con un errore sistematico noto, la lettura migliore peserebbe anche la direzione della freccia; nessun regolamento potrebbe applicarla, ma la frase corretta è che la regola è ottima date le informazioni che un giudice può avere.

S12 • La differenza minima discriminabile

In parole. Invertendo S10 si ottiene il divario che due arcieri devono avere perché lo spareggio li distingua con una data affidabilità. È il modo standard di dichiarare la risoluzione di uno strumento di misura.

$$p_{so} = p \Rightarrow c = p/(1-p), \sigma^B = \sigma_A \sqrt{c}, \Delta T = 72 \cdot \mu(\sigma_A) - 72 \cdot \mu(\sigma^B)$$

Da dove viene. Si impone che la formula di S10 valga la probabilità richiesta, si risolve per il rapporto delle ampiezze, e si converte in punti con S07. Le tre valute — millimetri, punti su 72 frecce, rapporto adimensionale — sono la stessa grandezza scritta in tre modi.

Un numero, per due arcieri attorno a 690 punti: per il 55 per cento servono 7,0 punti di divario, pari a 4,7 mm di differenza di ampiezza; per il 60 per cento, 14,8 punti e 10,0 mm; per due volte su tre, 27,3 punti e 18,5 mm; per tre volte su quattro, 48,3 punti e 32,7 mm.

La soglia dipende dal livello, e peggiora scendendo: per il 60 per cento servono 12,5 punti di divario fra due arcieri da 700, 14,8 punti fra due da 690, 19,3 punti fra due da 670 e 23,8 punti fra due da 650, sempre sul totale di 72 frecce. Il motivo è geometrico: nuvole larghe si sovrappongono molto anche a parità di divario in punti.

S13 • La scala delle frecce

In parole. Se invece di una freccia se ne tirassero n , la probabilità di indovinare crescerebbe secondo una formula esatta, e quel valore è il massimo raggiungibile da qualunque regola con n frecce.

$$P(n) = I_{c/(1+c)}(n, n), \quad c = \sigma^2 / \sigma_A^2$$

Da dove viene. La somma dei quadrati delle distanze è la statistica sufficiente per l'ampiezza: contiene tutta l'informazione che le n frecce portano su σ . Con n frecce quella somma segue una distribuzione Gamma; il rapporto fra due Gamma indipendenti riscalate segue una Beta, e la probabilità cercata è la sua funzione di ripartizione valutata in $c/(1+c)$. Per $n = 1$ la formula si riduce esattamente a S10, ed è il controllo di coerenza interna che il motore esegue.

Un numero. Per la coppia 690 contro 678 punti, che è il caso tipico: con una freccia la probabilità di indicare il più preciso vale 0,5828; con due 0,6230; con tre 0,6524; con quattro 0,6762; con nove 0,7573. Il vantaggio sopra il puro caso si moltiplica per 2,13 passando da una a quattro frecce, per 1,85 da quattro a sedici, e solo per 1,45 da sedici a sessantaquattro: la legge della radice vale finché il vantaggio è piccolo, poi il soffitto del cento per cento la spegne.

Parte quarta — Il match e il condizionamento

Sei formule per costruire il match a set, calcolare quanto spesso finisca in parità, e valutare correttamente le regole che riusano le frecce già tirate. È la parte in cui è più facile sbagliare.

S14 • La volata

In parole. Il punteggio di una volata è la somma di tre frecce indipendenti. La sua distribuzione si ottiene combinando tre volte quella di una freccia.

$$P(S = s) = (p * p * p)(s), \quad s = 0, \dots, 30$$

Da dove viene. L'asterisco indica la convoluzione: per ogni totale possibile si elencano tutti i modi di ottenerlo con tre frecce e se ne sommano le probabilità. È lo stesso conto con cui si trova la probabilità che tre dadi diano una data somma.

Un numero. Per l'arciere da 690 punti la volata più probabile vale 29 punti, e il trenta pieno esce nel 22,4 per cento dei casi.

S15 • L'esito di un set

In parole. Un set si vince, si pareggia o si perde. Le tre probabilità si ricavano confrontando le due distribuzioni di volata.

$$p_A = \sum_i P(S_A=i) \cdot P(S^B < i) \quad p_t = \sum_i P(S_A=i) \cdot P(S^B=i) \quad p^B = 1 - p_A - p_t$$

Da dove viene. È la definizione di confronto fra due variabili indipendenti: si fissa il risultato di A e si somma la probabilità che B faccia meno, poi si somma su tutti i risultati di A.

Un numero. Fra un arciero da 688 punti e uno da 670: A vince il set nel 56,3 per cento dei casi, pareggia nel 23,4 per cento, perde nel 20,3 per cento. La probabilità di pareggio è alta, ed è la ragione strutturale per cui i cinque pari non sono rari.

S16 • Il match a set

In parole. Il match si risolve percorrendolo a ritroso: si parte dagli stati finali, dove il vincitore è noto, e si risale set dopo set.

$$V(a,b,k) = p_A \cdot V(a+2,b,k+1) + p_t \cdot V(a+1,b+1,k+1) + p^B \cdot V(a,b+2,k+1)$$

Da dove viene. È induzione all'indietro: il valore di uno stato è la media dei valori degli stati raggiungibili, pesata per le probabilità di transizione. Gli stati terminali sono quelli in cui uno dei due raggiunge sei punti-set, più il cinque pari dopo il quinto set, che vale p_{so} .

Perché conta. L'interruzione anticipata non cambia il vincitore: chi arriva a sei punti-set lascia all'avversario al massimo quattro, comunque vadano i set restanti. Il motore verifica questa identità a zero macchina, ed è il controllo più rapido per scoprire un errore di stato nella ricorsione.

S17 • La probabilità di arrivare a cinque pari

In parole. La stessa ricorsione, con un'altra domanda: invece del vincitore, si chiede quanta probabilità finisca nello stato cinque pari.

$$\pi_{55} = \text{massa assorbita in (5,5) dopo cinque set}$$

Da dove viene. Si percorre la stessa ricorsione di S16, ma invece di propagare la probabilità di vittoria si propaga la probabilità di trovarsi in ciascuno stato. Gli stati in cui uno dei due raggiunge sei punti-set assorbono e non contribuiscono; ciò che resta dopo il quinto set è necessariamente cinque pari, perché i dieci punti-set assegnati devono essersi divisi a metà.

Un numero. Fra due arcieri identici da 690 punti vale 0,2034, cioè un match su cinque; a dieci punti di distacco scende a 0,1683; a venti punti a 0,1076, cioè un match su dieci. Nel formato cumulativo a quindici frecce le parità sono meno frequenti: 0,1347 fra pari, cioè circa due terzi, e 0,0556 a venti punti, cioè poco più della metà.

Perché conta. È il peso con cui ogni coppia entra nel calcolo della concordanza pesata di S24, e la ragione per cui gli spareggi capitano soprattutto fra arcieri simili.

S18 • Il condizionamento

In parole. Una regola che riusa le frecce del match va valutata sapendo che quelle frecce hanno già prodotto una parità. Valutarla senza tenerne conto sovrastima gravemente il suo valore.

$$P(\text{regola indovina} \mid 5-5) \neq P(\text{regola indovina})$$

Da dove viene. Il calcolo richiede una ricorsione congiunta: si propaga insieme lo stato dei punti-set e la statistica su cui la regola decide, e alla fine si guarda la distribuzione di quella statistica nel solo stato cinque pari.

Un numero. Per la coppia 688 contro 670 punti, il conteggio dei dieci e degli X vale 0,8176 senza condizionare e 0,5614 condizionando: crolla sotto lo spareggio che vorrebbe sostituire. Il totale grezzo delle quindici frecce vale 0,6809. La somma dei quadrati delle distanze passa da 0,8980 a 0,7906.

Un modo di vederlo. Per la coppia di riferimento, senza condizionare, il numero di dieci differisce in media di tre e coincide in un caso su dieci; fra i soli match finiti cinque pari differisce in media di uno e coincide in quasi un caso su tre. Fra due arcieri realmente pari a 690 punti la differenza non condizionata scende a 2,1 e la coincidenza sale a un caso su sette: il filtro resta netto, ma il termine di paragone va dichiarato.

S19 • La somma dei quadrati delle distanze

In parole. La regola alternativa che sopravvive al condizionamento: si sommano i quadrati delle distanze dal centro delle quindici frecce del match, e vince il totale minore.

$$\text{vince A} \Leftrightarrow \sum_i R_{A,i}^2 < \sum_i R_{B,i}^2$$

Da dove viene. È la statistica sufficiente di S13 applicata alle frecce già tirate invece che a frecce nuove. Il quadrato, e non la distanza semplice, perché è quella la grandezza che concentra l'informazione sull'ampiezza.

Il calcolo, in pratica. Dato l'anello in cui una freccia è finita, il quadrato della sua distanza segue un'esponenziale troncata fra i due bordi; la somma si ottiene per convoluzione su griglia, e il tutto si propaga insieme ai punti-set. Passo usato: 4 cm², verificato dimezzandolo.

Un numero. Condizionata al cinque pari vale 0,7906 per la coppia a diciotto punti di divario e 0,7185 per quella a dodici. Nel caso peggiore possibile — due arcieri con lo stesso identico profilo di anelli, dove l'informazione di punteggio è nulla per costruzione — la probabilità di indicare il più preciso vale ancora fra 0,60 e 0,71 secondo il profilo di anelli, contro lo 0,6153 dello spareggio.

Parte quinta — Robustezza, campo e tabellone

Sette formule per mettere alla prova le ipotesi e per passare dal singolo match a una gara intera.

S20 • La ricalibrazione a punteggio identico

In parole. Per confrontare due forme di nuvola bisogna che rappresentino arcieri della stessa forza. Deformare senza ricalibrare significa cambiare due cose insieme e attribuire alla forma un effetto che è un calo di livello.

$$\text{per ogni famiglia: trova } \sigma \text{ tale che } 72 \cdot \mu(\text{forma}, \sigma) = T$$

Da dove viene. È la stessa inversione di S_{07} , ripetuta per ogni famiglia di forme invece che per la sola circolare. Ciascuna famiglia ha un proprio legame fra ampiezza e punteggio atteso, perché la probabilità di cadere entro ciascun bordo dipende dalla forma; imporre lo stesso punteggio a tutte è ciò che rende il confronto un confronto di forme e non di livelli.

Un numero, per mostrare quanto la trappola sia concreta. Un arciero da 692 punti allungato a un rapporto fra gli assi di uno e mezzo a uno, senza ricalibrare, vale in realtà 675 punti: diciassette punti persi che sembrerebbero un effetto della forma e sono un effetto della deformazione.

Il controllo che serve. Campionare dalla distribuzione vera con l'ampiezza calibrata e verificare che il punteggio atteso torni. Verificare p_{so} non basta, perché quella grandezza dipende dal rapporto fra le scale ed è quasi insensibile alla forma: resta corretta anche con una funzione di ripartizione sbagliata.

S21 • La nuvola ellittica

In parole. Se le due componenti dell'errore hanno ampiezze diverse, la nuvola è ovale e la distanza dal centro non segue più una Rayleigh. Serve un integrale, e serve pesarlo correttamente.

$$F(r) = \int_0^{\pi/2} g(\theta) \cdot [1 - e^{(-r^2/2g(\theta))}] d\theta / \int_0^{\pi/2} g(\theta) d\theta, \quad g(\theta) = 1/(\cos^2\theta/\sigma_x^2 + \sin^2\theta/\sigma_y^2)$$

Da dove viene. Passando in coordinate polari, l'integrazione sul raggio si fa in forma chiusa e lascia un integrale sull'angolo. Il peso $g(\theta)$ al numeratore è obbligatorio: in una nuvola allungata l'angolo non è uniforme, perché la massa si addensa lungo l'asse lungo.

L'errore da non fare. Omettere quel peso, cioè integrare come se l'angolo fosse uniforme, produce un errore che arriva a due decimi sulla probabilità a un rapporto di tre a uno. Sopravvive a un controllo casuale su p_{so} , perché quello è insensibile alla forma, e si scopre soltanto verificando la calibrazione. Questa specifica lo ha contenuto per quattro versioni.

Un numero. A divario diciotto punti la probabilità di indicare il più preciso vale 0,6115 con un rapporto fra gli assi di 1,69 a uno e 0,6002 con un rapporto di 3,24 a uno, contro 0,6183 della nuvola circolare.

L'escursione complessiva. Messe insieme tutte e nove le forme provate — circolare, due gradi di centro spostato, due di ellissi, due di code pesanti, due di misture — e ricalibrate ciascuna allo stesso punteggio, a divario diciotto punti la risposta sta fra 0,5993 (code pesanti con $v = 4$) e 0,6230 (centro spostato di un'ampiezza intera). L'intera banda misura 2,37 punti percentuali, ed è il numero che il saggio pubblica. Il minimo cade sulle code pesanti e non sull'anisotropia: una versione precedente di questa specifica affermava il contrario, per via dell'errore sul peso angolare descritto qui sopra.

S22 • Il centro spostato

In parole. Un arciero con un errore sistematico — il gruppo un po' alto, o spostato a destra — non ha la nuvola centrata sul punto di mira. La distanza dal centro segue allora una distribuzione diversa, che porta il nome di Rice.

$$R \sim \text{Rice}(|\mu|, \sigma), \text{ con } (x, y) \sim N(\mu, \sigma^2 I)$$

Da dove viene. È la stessa costruzione di So_4 , ma con la campana centrata altrove: la distanza dal centro del bersaglio è la distanza da un punto che non coincide più con il vertice della campana. Per spostamento nullo la Rice si riduce esattamente alla Rayleigh di So_4 , e questo è il controllo di coerenza che il motore esegue.

Un numero, ricalibrando ogni volta a 690 punti. Con lo spostamento pari a mezza ampiezza il gruppo si stringe a 4,20 cm di ampiezza e il centro si sposta di 2,10 cm; con uno spostamento pari a un'ampiezza intera, l'ampiezza scende a 3,61 cm e il centro si sposta di 3,61 cm. In entrambi i casi la frazione di dieci resta attorno al sessanta per cento, perché la calibrazione lo impone: l'arciere è diverso, non peggiore.

Perché conta. A divario diciotto punti il potere discriminante vale 0,6186 con mezzo spostamento e 0,6230 con uno intero, contro 0,6183 della nuvola circolare. È il valore più alto di tutta la classe delle forme, e va detto perché è controintuitivo: uno scentramento sistematico, a parità di punteggio, rende i due arcieri un poco più distinguibili invece che meno.

Che cosa non copre. La direzione dello spostamento, che qui non entra: conta solo il suo modulo, perché la regola dello spareggio guarda la distanza dal centro e non l'angolo. È anche la ragione per cui, con un bias noto, la lettura ottimale non sarebbe più quella di S_{11} .

S23 • Le code pesanti

In parole. Un arciere che ogni tanto butta via una freccia senza ragione ha una nuvola con code più spesse della campana. A parità di punteggio deve compensare con un nucleo più stretto.

$$R^2 / 2\sigma^2 \sim F(2, v)$$

Da dove viene. È la t bivariata: una campana la cui ampiezza è essa stessa aleatoria. Il quadrato della distanza normalizzato segue una distribuzione F con due e v gradi di libertà; valori alti di v la rendono indistinguibile dalla campana, valori bassi la ingrossano.

Un numero, calibrando entrambe a 690 punti. La campana mette nel dieci il 60,7 per cento dei tiri e nell' X il 20,8 per cento, e prevede una freccia peggiore del sette una volta ogni 3,1 milioni di tiri. Con $v = 4$: il dieci nel 67,4 per cento dei tiri, l' X nel 29,1 per cento, e una freccia peggiore del sette ogni 169 tiri. L'ampiezza tipica passa da 4,46 a 3,52 cm.

S24 • La concordanza pesata

In parole. Non interessa quanto valga lo spareggio in generale, ma quanto valga nelle situazioni in cui viene usato. Bisogna quindi pesare ogni coppia per la probabilità che finisca in parità.

$$\bar{P} = \sum w_i w_j \cdot \pi_{55}(i,j) \cdot p_{50}(i,j) / \sum w_i w_j \cdot \pi_{55}(i,j)$$

Da dove viene. È una media condizionata: si somma su tutte le coppie del campo, pesando ciascuna per la probabilità di arrivare allo spareggio, e si normalizza. La somma va estesa a tutte le coppie ordinate, diagonale inclusa: due arcieri identici sono un'estrazione legittima del campo e contribuiscono un mezzo, perché nessuno dei due è il più preciso.

Il campo. Gaussiana sui punteggi con media ed estensione dichiarate, 41 punti fra media meno tre e media più tre estensioni, estremo superiore comunque limitato a 716 punti perché sopra non esistono arcieri; pesi normalizzati. Nessun dato di gara.

Un numero. Sui tre campi illustrativi — media 675 ed estensione 10, media 670 ed estensione 15, media 660 ed estensione 20 — la probabilità pesata vale rispettivamente 0,5556, 0,5672 e 0,5721, e il divario medio delle coppie che arrivano allo spareggio sta fra 9,1 e 14,0 punti su 72 frecce. Senza condizionare sulla parità le stesse tre medie valgono 0,5685, 0,5961 e 0,6136.

Una nota sulla stabilità. La media pesata è insensibile alla discretizzazione: identica alla quarta cifra con troncamento a tre, quattro o cinque estensioni e con 41 o 61 punti. La versione non condizionata invece si muove, perché le code lontane pesano molto, e va riportata solo insieme alla griglia che la produce.

S25 • Il tabellone

In parole. Sessantaquattro arcieri, sessantatré match. Si propaga turno per turno la probabilità che ciascuno occupi ciascuna posizione, e a ogni incontro si accumula la probabilità che finisca in parità e l'esito atteso dello spareggio.

$$P_{t+1}(a) = \sum_b P_t(a) \cdot P_t(b) \cdot \pi(a > b) \quad E[\text{spareggi}] = \sum_t \sum_{a,b} P_t(a) P_t(b) \cdot \pi_{55}(a,b)$$

Il campo, dichiarato per intero. La variabile del profilo è $u = (j-2)/62$ per il seed j da 2 a 64: u vale zero esattamente al seed 2 e uno al seed 64, mentre il seed 1 vale il vertice. Con vertice 690 punti, distacco 4 punti ed estensione 40 punti si ha seed 1 = 690, seed 2 = 686, seed 64 = 646. I quattro profili provati sono lineare, concavo, convesso e sigmoide.

Un numero. Numero atteso di spareggi per turno: 3,69 al primo turno, 2,33 ai sedicesimi, 1,35 agli ottavi, 0,72 ai quarti, 0,37 in semifinale e 0,19 nella finale per l'oro. I turni hanno però un numero di match diverso — trentadue il primo, uno solo la finale — e per questo gli stessi valori compaiono anche in percentuale. In totale 8,64 spareggi sui sessantatré match, contro i 4,69 del formato cumulativo. La percentuale di match decisi da una freccia sale dall'11,5 al 18,7 per cento; la concordanza scende da 0,5831 a 0,5331; il divario medio dei contendenti da 15,2 a 4,8 punti.

Le bande. Su dodici campi — quattro profili per tre combinazioni di distacco ed estensione — gli spareggi totali attesi stanno fra 7,87 e 10,09 sui sessantatré match. La probabilità che la finale vada allo spareggio sta fra il 16,8 e il 19,8 per cento. E la probabilità che lo spareggio indichi il più preciso sta fra il 57,3 e il 61,2 per cento al primo turno, fra il 51,5 e il 55,5 per cento in finale. Su quarantotto campi estremi la concordanza in finale resta fra 0,513 e 0,571: il verso — frequenza che sale, affidabilità che scende — non si inverte mai.

Un controllo incrociato, e va impostato con cura perché il confronto sia lecito. Sul campo tipico — vertice 690, distacco 4 ed estensione 40 — il divario medio pesato sull'intero tabellone vale fra 9,2 e 13,7 punti a seconda del profilo, e cade dentro la forchetta 9,1–14,0 che S24 ottiene per una strada del tutto diversa. Sono due macchine indipendenti: se non concordassero, una delle due sarebbe sbagliata. Il confronto va però fatto a parità di campo: allargando alle dodici combinazioni di distacco ed estensione il divario si estende da 8,1 a 14,2 punti, ma quelle sono popolazioni diverse da quelle di S24 e la forchetta non è più il termine di paragone giusto.

S26 • Il controllo negativo

In parole. Verrebbe da chiedersi se tutto il modello si possa evitare, ricavando la risposta dai soli dati pubblici: i risultati di gara riportano quante frecce di ciascun anello ha fatto ogni arciera, e sembrerebbe abbastanza. Non lo è, e il conto dice esattamente di quanto.

$$p_{so} \in [\sum_{i+j} q_i q_j', \sum_{i+j} q_i q_j' + \sum_i q_i q_i']$$

Da dove viene. Sapendo con che frequenza ciascuno dei due arcieri finisce in ciascun anello, i confronti fra anelli diversi sono determinati: se A è in un anello più interno di B, A vince, punto. Resta indeterminato che cosa accada quando finiscono nello stesso anello, perché lì decide la posizione entro l'anello, che i risultati non riportano. Quella massa può andare tutta a uno o tutta all'altro: da qui i due estremi.

Un numero. Per la coppia 688 contro 670 punti la banda va da 0,3804 a 0,8107: è larga 0,4303, e il valore vero, 0,6153, ci sta dentro insieme a qualunque altra risposta plausibile. Aggiungendo il conteggio degli X la banda scende a 0,3222, e suddividendo la zona centrale in dieci sottoanelli soltanto a 0,3001.

Perché conta. La massa pari-anello non sta solo nel dieci: è distribuita su tutti gli anelli, e per questo affinare il centro non la riduce. Delimitare invece di stimare, che è il metodo di tutto il lavoro, non è una scelta di comodo ma l'unica strada percorribile senza le coordinate.

Le assunzioni, tutte insieme

Vale la pena raccoglierle in un punto solo, perché sparse fra le formule si perdono di vista.

assunzione	dove entra	che cosa succede se cade
Nuvola circolare e centrata	S03, S11	L'ottimalità della regola vale solo date le informazioni di un giudice. Il potere discriminante si muove di due punti percentuali e quattro decimi sull'intera classe di forme (S21–S23).
Frecce indipendenti e identicamente distribuite	tutto	È il limite più serio. La freccia di spareggio è la più gravata dello sport, e misure su gare vere trovano un calo di rendimento proprio lì.
Bravura come singola quantità	S07	Il confronto misura la precisione grezza, non l'abilità competitiva completa. È dichiarato in apertura, non dedotto dagli esiti.
Punteggio atteso, non osservato	S07	L'inversione lega l'ampiezza al valore medio. Un singolo risultato di gara non basta a fissarla.
Freccia puntiforme	S01, S05	Il diametro reale sposta i confini di scoring verso l'esterno: l'ampiezza a 690 punti passa da 4,46 a 4,64 cm con frecce da 5,5 mm, mentre la probabilità di spareggio si muove di tre millesimi.
Campo parametrico dichiarato	S24, S25	I risultati aggregati dipendono dalla composizione del campo, e per questo sono riportati come bande su dodici e quarantotto scenari.
Controfattuale contabile	S18, S19	Sotto una regola diversa gli arcieri tirerebbero diversamente. Il conto cambia il criterio di lettura, non il comportamento.

Che cosa tutto questo dimostra

Non dimostra che lo spareggio sia ingiusto, perché la giustizia di una regola sportiva non è una grandezza che un calcolo possa produrre. Dimostra qualcosa di più modesto e più utile: che, sotto un modello dichiarato e messo alla prova su nove forme diverse, una freccia sola distingue due arcieri arrivati in parità poco più di cinquantacinque volte su cento, e che quel numero peggiora man mano che il tabellone avanza.

Dimostra inoltre che il difetto non sta nella regola, che è la lettura ottimale di quella freccia, ma nella numerosità; e che esistono due strade per rimediare, entrambe misurate, di cui una non costa un solo tiro in più e richiede soltanto di leggere un dato che i bersagli elettronici già registrano.

Tutto il resto — se convenga cambiare, se lo spettacolo valga la precisione, se un torneo debba somigliare a una misura o a un rito — non è una domanda a cui queste pagine possano rispondere, e non hanno provato a farlo.