

Indice

1. Il giorno in cui il tiro con l'arco cambiò aritmetica
2. Che cosa succede in una gara olimpica: qualificazione, teste di serie, tabellone
3. Le due aritmetiche: set system e punteggio cumulativo
4. Che cosa vuol dire «più bravo»
5. La nuvola e la sua ampiezza
6. Da un punteggio a un'ampiezza
7. Come si calcola una gara che non si è mai giocata
8. La macchina che fa i conti
9. Il verdetto: quanto costa il set system
10. Il costo dipende dal livello: quando il set system penalizza di più
11. Il colpevole è la regola dei set, non la brevità del match
12. Il paradosso di vincere con meno punti
13. Le prove che il risultato non dipende dalla forma della nuvola
14. Sei match di fila: che cosa succede a un torneo intero
15. Quanti punti servono per sapere chi è più bravo
16. Ciò che il modello non vede
17. I limiti
18. Che cosa portarsi a casa
19. La distanza fra il gruppo e il risultato
20. Come è fatta ogni voce
21. Notazione e unità
22. Una nota su che cosa tutto questo dimostri

Set system nel tiro con l'arco: la matematica di chi vince

Il giudice invisibile

Perché a volte vince chi ha totalizzato meno, e quanto conta davvero il modo di contare i punti

Matteo Campagna — matteocampagna.com

COME CITARE QUESTO LAVORO

Campagna, M. (2026). Set system nel tiro con l'arco: la matematica di chi vince. Versione 1.1, 11 ottobre 2026. Ricerca indipendente. <https://doi.org/10.5281/zenodo.23261736>

Il giorno in cui il tiro con l'arco cambiò aritmetica

Nel 2010 il tiro con l'arco ricurvo cambiò una regola sola, e non fu una di quelle che si vedono da fuori: non la distanza, che è rimasta di settanta metri, non il bersaglio, che è rimasto un disco da centoventidue centimetri, e nemmeno gli archi o le frecce. Cambiò l'aritmetica con cui si stabilisce quale dei due contendenti passa il turno e quale torna a casa; il che, in uno sport a eliminazione diretta, è poi l'unica cosa che conti. Il passaggio non fu netto come lo si racconta: il set system entra nel ricurvo individuale nel 2009 e diventa il formato dell'intero circuito maggiore l'anno dopo, e in quella prima stagione non era ancora uniforme: le fasi di eliminazione tiravano set da sei frecce, e i set da tre che oggi valgono per tutti i match si usavano soltanto dai quarti in avanti.

Fino ad allora i match si decidevano sommando i punti: si tirava un certo numero di frecce e vinceva chi aveva totalizzato di più. Da allora, si decidono a set: tre frecce alla volta, il set va a chi in quelle tre ha fatto meglio, e il match a chi si aggiudica per primo un certo numero di set. Sono due modi di leggere esattamente le stesse frecce. E sulla stessa identica gara, possono dare due verdeti diversi.

La federazione internazionale non nascose le proprie ragioni. Col vecchio sistema, una sfida poteva essere essenzialmente persa dopo una sola volée a causa di un tiro sbagliato: bastava una freccia disastrosa perché il totale diventasse irrecuperabile. Il formato a set fu adottato per impedirlo, per premiare la costanza e per tenere il match aperto fino in fondo.

Da allora si discute se il cambio sia stato un bene o un male, e la discussione è rimasta un giudizio d'opinione: chi trova il set system più giusto, chi lo accusa di regalare vittorie. Ma giusto e ingiusto sono parole del tribunale, non del bersaglio. Un formato di gara non ha una morale, non premia il merito e non punisce la colpa: fa una cosa sola, più modesta e in fondo più interessante, e cioè misura la prestazione di due persone per ricavarne un verdetto.

E a uno strumento di misura non si chiede se sia giusto, ma quanto è preciso, quanto spesso, cioè, guardando un pugno di frecce, sappia indicare davvero, fra due arcieri, quello che tira meglio. A differenza del chiedersi se sia un'ingiustizia, questa è una domanda che ha una risposta. E la risposta è un numero, che si può calcolare senza tirare una sola freccia.

Che cosa succede in una gara olimpica: qualificazione, teste di serie, tabellone

Conviene partire dalle basi, perché la struttura della gara è il motivo per cui la domanda ha senso.

Una prova olimpica di arco ricurvo individuale si svolge in due fasi. La prima si chiama round di qualificazione e non elimina nessuno: gli arcieri ammessi tirano settantadue frecce ciascuno, alla distanza di settanta metri, contro una faccia da centoventidue centimetri di diametro. Il massimo teorico è settecentoventi punti. Quel punteggio non vale una medaglia: serve a ordinare gli arcieri dal primo all'ultimo, assegnando a ciascuno una testa di serie.

La faccia è fatta di dieci corone concentriche, tutte larghe uguale: sei centimetri e un millimetro l'una. Una freccia che cade entro il cerchio interno di raggio 6,1 cm vale dieci punti; nella corona successiva nove; e così via calando fino a uno, nell'anello più esterno che si chiude a sessantuno centimetri dal centro. Oltre quel bordo, zero. Dentro il dieci c'è poi un cerchietto ancora più piccolo, di 3,05 cm di raggio, che si chiama X: vale gli stessi dieci punti, e serve soltanto a dirimere le parità.

Per capire l'ordine di grandezza del gesto vale la pena tradurlo in qualcosa di familiare. A settanta metri l'intera faccia da centoventidue centimetri occupa nel campo visivo grosso modo lo spazio di una moneta da due euro tenuta a un metro e mezzo dagli occhi. L'anello del dieci, dodici centimetri e due di diametro, equivale a quella stessa moneta vista da una quindicina di metri. Un punteggio da vertice assoluto, attorno ai settecentodieci punti su settecentoventi, vuol dire mettere dentro quella moneta più di otto frecce su dieci, settantadue volte di fila.

La seconda fase è il tabellone a eliminazione diretta: trentadue match nel primo turno, sedici nel secondo, poi otto, quattro, due e la finale. Servono sei vittorie consecutive per l'oro. Ogni match è una misura brevissima, quindici frecce al massimo, e da quella misura dipende tutto.

Le due aritmetiche: set system e punteggio cumulativo

Il punteggio cumulativo è il modo intuitivo di calcolare i punti: si tirano quindici frecce a testa, si sommano, vince il totale più alto. In caso di parità esatta si tira una freccia sola e vince chi la piazza più vicina al centro: lo spareggio, in gergo shoot-off. È il sistema con cui si decidono ancora oggi i match della divisione compound.

Il set system è diverso in un punto solo, ma quel punto cambia tutto. La gara si spezza in set da tre frecce. Chi in un set totalizza di più si aggiudica due punti-set; se il set finisce pari, un punto per uno. Vince il match il primo arciere che arriva a sei punti-set. Se si arriva a cinque pari, decide lo shoot-off, una singola freccia, la più vicina al centro. Poiché i punti-set si accumulano senza tornare indietro, il match finisce nell'istante esatto in cui uno dei due tocca quota sei: può chiudersi in tre set, in quattro o in cinque, cioè in nove, dodici o quindici frecce.

La differenza sembra tecnica, ma ha una conseguenza che vale la pena vedere con dei numeri veri. Prendiamo un match a set finito cinque set su cinque.

Set	arciere A	arciere B	punti-set
1°	30	26	2 – 0 (A)
2°	27	28	2 – 2 (B)
3°	28	29	2 – 4 (B)
4°	30	25	4 – 4 (A)
5°	27	28	4 – 6 (B)
Totale	142	136	vince B

A ha messo sul bersaglio sei punti in più dell'avversario e ha perso il match quattro a sei. Non è un'anomalia, né un errore di calcolo: è il sistema che funziona come deve. Il set system non conta i punti, conta i momenti vinti. Aggiudicarsi un set per quattro punti di scarto vale esattamente quanto aggiudicarselo per uno, e i margini accumulati nei set già vinti non servono a nulla. A ha dominato dove non serviva e ha ceduto di misura dove contava.

È la stessa proprietà per cui il formato fu scelto, vista dall'altro lato: se una freccia disastrosa ti costa il set in cui è caduta e nient'altro, il danno resta confinato; ma allora, per simmetria, nemmeno i punti in eccesso possono uscire dal set in cui li hai fatti. Robustezza e paradosso sono la stessa moneta. Quanto spesso accada lo vedremo più avanti, con un numero.

Che cosa vuol dire «più bravo»

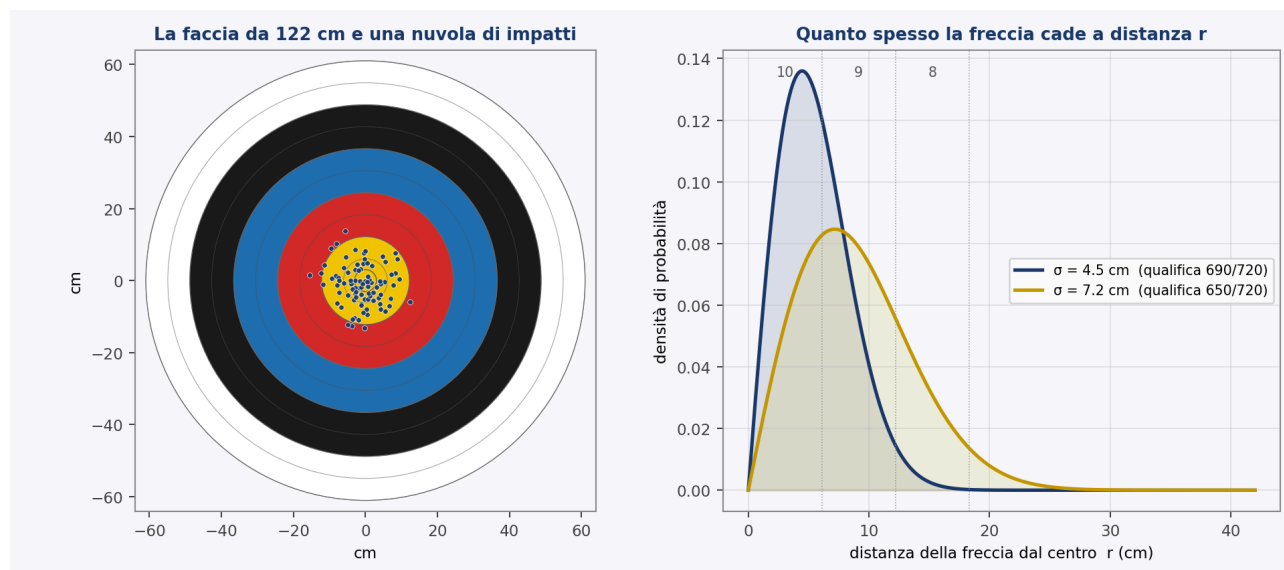
Per misurare quanto spesso un formato indichi il migliore, bisogna prima dire che cosa significa migliore. E bisogna dirlo prima di guardare i risultati, non dopo: è la precauzione elementare che tiene in piedi tutto il resto. Se definissimo il più bravo come chi ha vinto, ogni formato sarebbe perfetto per costruzione e non ci sarebbe più niente da misurare.

Qui bravura significa una cosa sola, fissata in anticipo: la precisione grezza di tiro, cioè quanto stretto è il gruppo che l'arciere lascia sul bersaglio. È una definizione volutamente spartana. Non è l'abilità completa di gara: lascia fuori la freddezza sotto pressione, la lettura del vento, la gestione tattica dei set, i nervi nella freccia di spareggio. Non pretendiamo che sia tutto. È semplicemente la quantità che chiediamo a ciascun formato di recuperare, e ogni numero che segue misura quanta informazione su quella quantità ciascuna regola riesce a conservare.

La nuvola e la sua ampiezza

Un gruppo di frecce, per fortuna, si lascia descrivere da un solo numero. Immaginate di scomporre ogni errore in due componenti indipendenti: di quanto la freccia è finita a destra o a sinistra rispetto al centro, e di quanto sopra o sotto. Se ciascuna delle due componenti segue la curva a campana di Gauss (l'ipotesi standard per gli errori di quasi qualunque misura, dal peso su una bilancia alla posizione di una stella al telescopio) e se le due hanno la stessa ampiezza, allora la distanza della freccia dal centro, che è l'unica cosa che determina il punteggio, segue una distribuzione che i matematici chiamano di Rayleigh.

La distribuzione di Rayleigh ha un solo parametro, che si indica con la lettera greca sigma e si misura in centimetri. Sigma è l'ampiezza tipica della nuvola: un sigma piccolo significa nuvola stretta e arciere fortissimo, un sigma grande nuvola larga. Quel numero è la firma dell'arciere, e da solo contiene tutto ciò che il modello sa di lui.



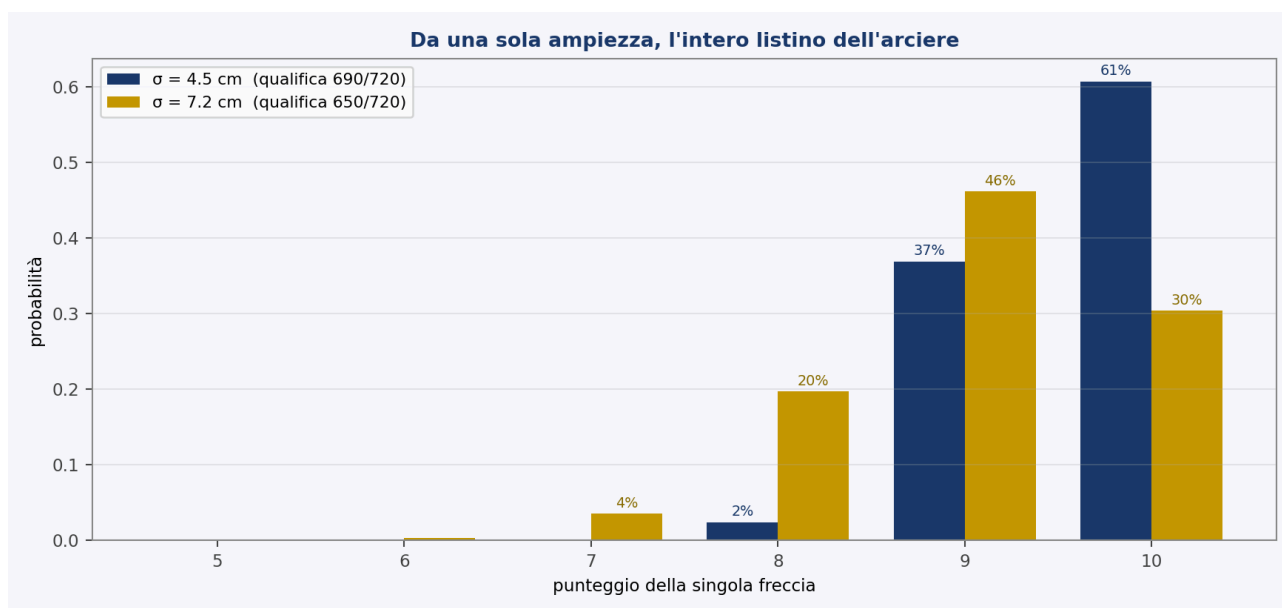
La firma dell'arciere. A sinistra la faccia da 122 cm con una nuvola di impatti; a destra la densità di Rayleigh, cioè quanto spesso la freccia cade a una data distanza dal centro, per due ampiezze diverse. Tutta l'informazione sta in un numero: quanto è larga la nuvola.

Poiché gli anelli del bersaglio sono corone concentriche di larghezza nota, la probabilità di fare esattamente dieci, o nove, o otto, è semplicemente la probabilità di cadere entro il bordo esterno di quell'anello meno la probabilità di cadere entro il bordo interno. Due sottrazioni, e si ottiene la probabilità di ogni singolo punteggio.

$$P(S = s) = \exp\left(-\frac{[(10 - s)w]^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{[(11 - s)w]^2}{2\sigma^2}\right)$$

La probabilità di totalizzare esattamente s punti con una freccia, per un arciere di dispersione sigma; w è la larghezza dell'anello, 6,1 cm. La spiegazione riga per riga è in appendice, alla voce Fo6.

Da una sola ampiezza discende così l'intero listino dell'arciere: la sua probabilità esatta di fare dieci, nove, otto, a ogni singolo tiro. Un arciere il cui punteggio atteso su settantadue frecce è 690 ha una nuvola di quattro centimetri e mezzo e mette nel dieci circa sei frecce su dieci; uno da 650 ha una nuvola di poco più di sette centimetri e ci arriva soltanto tre volte su dieci. Un fatto fisico, il quanto stringi il gruppo di frecce, è diventato una lista precisa di numeri.

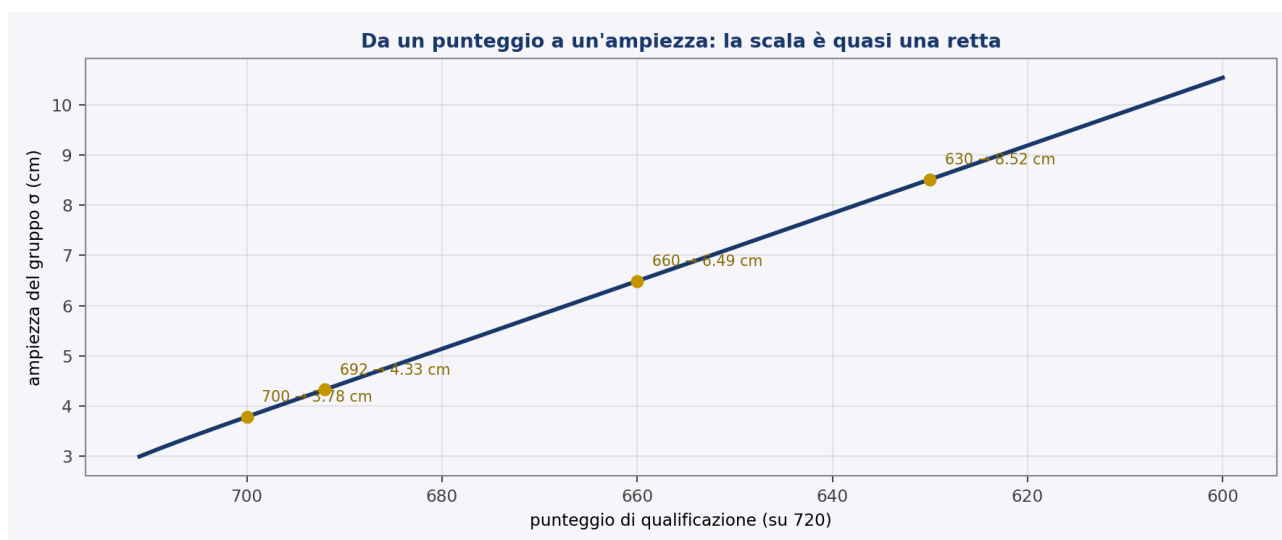


Lo stesso arciere, due ampiezze di nuvola. Da quel numero si ricava quante frecce, in proporzione, finiscono in ciascun anello: un gruppo più stretto sposta la massa verso il dieci e prosciuga la coda bassa.

Da un punteggio a un'ampiezza

La relazione funziona anche al contrario, ed è questo che rende il modello utilizzabile. Poiché il listino dipende da sigma, dipende da sigma anche il punteggio medio per freccia, e quindi il totale atteso su settantadue frecce. Quella relazione è monotona: più stretta la nuvola, più alto il totale, senza eccezioni. La si può quindi invertire: dato un valore del punteggio medio, si cerca l'unica ampiezza di nuvola che lo produce. Il passaggio inverso appena descritto è un'altra faccenda però, e più avanti si vedrà quanto costa: un singolo round da settantadue frecce lascia l'ampiezza indeterminata entro più di un centimetro.

Il risultato è una mappa che traduce i punti di tabellone in centimetri di gruppo, e ha una proprietà controintuitiva che vale la pena guardare da vicino. In tutta la fascia che conta, dai 630 punti fino ai 700, la relazione è praticamente una retta, con pendenza di poco meno di sette centesimi di centimetro per punto, il che, tradotto in termini maneggiabili significa che un singolo punto di qualificazione vale sette decimi di millimetro di larghezza del gruppo. Otto punti, che sulla griglia sembrano un abisso, valgono cinque millimetri e mezzo scarsi, identici in cima e in fondo alla fascia.



La mappa che traduce un punteggio di qualificazione nell'ampiezza del gruppo che lo produrrebbe. Quasi una retta: un punto vale sette decimi di millimetro, dal fondo della griglia fino quasi al vertice.

La scala si impenna soltanto all'estremo superiore, sopra i 700 punti, dove per guadagnare ancora bisogna far collassare il gruppo verso lo zero. Ma per tutto il resto del campo l'uniformità è totale, ed è proprio questa la notizia: fra un punteggio da vertice di 700 e uno da fondo griglia di 630 corrono meno di cinque centimetri di larghezza del gruppo, e fra due arcieri separati da un punto solo in classifica, meno di un millimetro. Fra il campione e il quasi-campione, sul bersaglio, non c'è quasi nulla. Vale la pena tenerlo a mente, perché spiega metà di ciò che segue.

Come si calcola una gara che non si è mai giocata

Abbiamo un numero per ogni arciere, e ci manca la macchina che da quel numero ricavi le probabilità di vittoria: si tratta in realtà di più pezzi distinti, ciascuno con un compito preciso, che conviene guardare uno alla volta.

Il primo serve a sommare le frecce e si chiama convoluzione. Il nome intimidisce, l'idea è da scuola elementare: se conosco la probabilità di ogni singolo punteggio, ricavo quella di un totale a due frecce contando tutte le strade per arrivarci (a diciannove ci si arriva con dieci più nove oppure con nove più dieci, a diciotto in tre modi diversi) e pesando ogni strada per quanto è probabile. L'operazione combina due frecce alla volta, e si applica di nuovo al risultato: la distribuzione di due frecce combinata ancora con quella di una dà quella di tre, cioè di un set, e proseguendo si arriva a quindici, cioè a un match cumulativo. Confrontando le distribuzioni dei due arcieri si ottiene la probabilità esatta che vinca il più preciso.

Il secondo serve al set system, che non è una somma ma un processo con memoria: tre frecce, qualcuno si prende il set, due a zero; altre tre, magari due a due; e la gara finisce nell'istante in cui uno tocca i sei punti-set, non un tiro più tardi. Lo si calcola come una partita a un gioco da tavolo. Si disegna una scacchiera di caselle (ogni casella è un possibile punteggio dei set: zero a zero, due a zero, due a due, quattro a due) e da ciascuna si conoscono già le probabilità di saltare alla successiva, perché sono quelle del set appena calcolate. Sommando la probabilità di ogni percorso che termina con la vittoria di A si ottiene la sua probabilità esatta di vincere il match. I matematici chiamano questa costruzione una catena di Mar-

kov assorbente, perché alcune caselle, quelle in cui uno dei due tocca i sei punti-set, non si lasciano più: chi ci arriva ha vinto e la partita finisce lì.

Il terzo serve agli spareggi, e ha una forma chiusa sorprendentemente pulita. Vale la pena essere precisi su come funziona: il regolamento assegna la vittoria alla freccia di punteggio più alto e usa la vicinanza al centro solo per rompere un'ulteriore parità, ma le due formulazioni portano sempre allo stesso vincitore, perché gli anelli sono concentrici e la freccia più vicina al centro non può mai valere meno dell'altra. Trattandolo dunque come un confronto di distanze, la probabilità che vinca A dipende solo dal rapporto fra le due nuvole: è sigma di B al quadrato diviso la somma dei due quadrati. Se le nuvole sono uguali fa esattamente un mezzo, come dev'essere. Fra un arciere da 690 punti e uno da 665 fa poco più di sessantacinque su cento, il che vuol dire che il più preciso è sì favorito, ma di una quantità che lascia la porta ampiamente aperta all'altro. La stessa regola si applica a entrambi i formati, perché concedere uno spareggio a una regola e negarlo all'altra falserebbe il confronto.

C'è infine un pezzo che serve a una domanda particolare: quante volte il vincitore ai punti-set finisce con meno punti totali dell'avversario. Per rispondere non basta calcolare chi vince e poi guardare i totali, perché le due cose vanno seguite insieme, set dopo set. La macchina porta allora avanti un secondo contatore accanto al punteggio dei set: la differenza grezza accumulata. A ogni set il segno della differenza fra i due totali di tre frecce decide chi si prende il set, e il suo valore aggiorna il conto complessivo. Alla fine si sommano le probabilità di tutti gli stati in cui chi ha vinto il match ha il totale più basso.

Un'ultima precisazione: non si simula mai per ottenere un risultato. Non si fa girare la gara diecimila volte sperando che la media dica il vero. Ogni probabilità è calcolata per intero, fino all'ultima cifra. Una simulazione restituisce una risposta velata dal caso (rilancia e cambia un poco) mentre il calcolo esatto restituisce la risposta, senza nebbia. Quando fra poco leggeremo che una certa differenza vale 2,32 punti percentuali, quel valore non porta errore di campionamento: chi rifacesse il conto domani, o su un'altra macchina, otterrebbe la stessa cifra fino all'ultimo decimale calcolato. Il caso comparirà una volta sola in queste pagine, e in un ruolo diverso: come controllo esterno di un'integrazione, mai come sorgente di un numero pubblicato. Nel testo i numeri sono arrotondati alla seconda cifra, come si fa ovunque; nel codice che accompagna il lavoro ci sono per intero.

La macchina che fa i conti

I conti non sono fatti a mano. Dietro c'è un motore di calcolo costruito apposta: prende la geometria di un bersaglio, l'ampiezza della nuvola di due arcieri e le regole di un formato, e restituisce le probabilità esatte di ogni esito. È lo strumento che ha prodotto ogni tabella e ogni figura di questo lavoro, e vale la pena dire come è stato costruito, perché chi legge ha diritto di sapere chi ha fatto i conti e con quale garanzia.

Il motore è stato scritto con l'assistenza di un sistema di intelligenza artificiale, a partire da una specifica che fissa la matematica modulo per modulo: la geometria dei volti di gara, il modello di dispersione, il simulatore di frecce, l'inversione dal punteggio all'ampiezza, i formati di match, la balistica della traiettoria. Dirlo apertamente è necessario. Dire che cosa significa, e soprattutto che cosa non significa, lo è ancora di più.

Un'intelligenza artificiale ha scritto il codice; nessuna intelligenza artificiale ha indovinato i risultati. La differenza è tutta qui. Il codice implementa formule in forma chiusa (la distribuzione di Rayleigh, la convoluzione dei totali, l'induzione all'indietro sui punti-set) che sono esattamente la matematica che si farebbe a mano avendo pazienza infinita. Non c'è apprendimento, non c'è addestramento sui risultati delle gare passate, non c'è previsione. C'è aritmetica, eseguita in fretta e sempre allo stesso modo: dati gli stessi ingressi il motore restituisce sempre la stessa uscita, perché non c'è nulla da estrarre: ogni passaggio è la valutazione di una funzione.

La distinzione non è una sottigliezza, perché cambia ciò che si può controllare. Un sistema che indovinasse il vincitore avendo imparato dalle gare passate sarebbe una scatola chiusa: gli si può solo credere o non credere. Un motore che calcola una formula dichiarata è verificabile riga per riga: si legge la specifica, si rifà il conto, si controlla il numero.

E la verifica è stata fatta, su tre livelli. Il primo è il più elementare e il più necessario: più di un centinaio di test automatici sul motore nel suo insieme, ciascuno legato a un criterio dichiarato nella specifica, che devono passare tutti prima che sia considerato utilizzabile. Di questi, una ventina abbondante accompagnano il pacchetto distribuito insieme al lavoro e coprono specificamente i moduli e i calcoli di queste pagine: chi lo scarica può lanciarli in un comando solo e vederli passare, insieme a uno script che ricalcola davanti ai suoi occhi ogni numero stampato in queste pagine e lo confronta con quello pubblicato.

Il secondo riguarda le formule che una soluzione analitica non ce l'hanno. Dove la forma chiusa esiste il motore la usa, perché è esatta e immediata; dove non esiste (la nuvola ellittica, il centro spostato, le miscele con frecce anomale) ricorre all'integrazione numerica. E qui si pone una domanda che di solito nessuno fa: quanto è approssimata quell'approssimazione?

La risposta ovvia sarebbe confrontarla con la formula esatta nel caso isotropo, l'unico in cui la formula esiste, e in effetti le due coincidono fino all'undicesima cifra decimale. Ma quel confronto, da solo, non basta, e vale la pena capire perché: in una nuvola circolare la densità è la stessa in tutte le direzioni, quindi la parte angolare del calcolo si semplifica e sparisce. Un integratore che sbagliasse proprio quella parte, che è l'errore più naturale, e quello che conta davvero appena la nuvola diventa ellittica, supererebbe il test isotropo a punteggio pieno e continuerebbe a sbagliare su tutte le righe che ci interessano.

La prova che serve è dunque un'altra, e va fatta proprio sulle forme deformate: si estrae un campione enorme direttamente dalla distribuzione vera (venti milioni di tiri) e si confronta il punteggio medio che ne risulta con quello che l'integrazione predice. Sull'ellisse uno e mezzo a uno, su un'ellisse esagerata di tre a uno e sul gruppo spostato di tre centimetri lo scarto resta di un paio di millesimi di punto a freccia, lo stesso che si misura nel caso circolare. La dipendenza angolare, insomma, è trattata bene: non perché lo si supponga, ma perché è stata verificata dove poteva rompersi.

Il terzo è quello che, per un lavoro come questo, vale più di tutti gli altri messi insieme. Ogni numero di queste pagine è stato ricalcolato da una seconda implementazione, scritta separatamente a partire dalla stessa specifica matematica: codice diverso, scelte di programmazione diverse, nessuna riga condivisa con la prima. Le due macchine sono state confrontate su trentaquattro grandezze, dalle probabilità di zona alle probabilità d'oro sul tabellone, e concordano entro un centomillesimo in termini relativi: circa cinque cifre significative, con il residuo attribuibile all'errore di quadratura del metodo numerico e non a un disaccordo sul risultato. È la forma di controllo più severa che esista contro gli errori di implementazione, perché un errore di programmazione che si ripete identico in due implementazioni indipenden-

ti è molto meno probabile di un errore che ne colpisce una sola. Vale la pena insistere su che cosa significhi, perché è la garanzia più solida che queste pagine abbiano e di solito passa inosservata. Non due esecuzioni dello stesso programma, che darebbero ovviamente lo stesso risultato; due traduzioni indipendenti della stessa matematica, fatte in momenti diversi e con strutture dati diverse. Perché concordino a cinque cifre su trentaquattro grandezze diverse, o entrambe hanno ragione, oppure hanno commesso lo stesso errore due volte senza sapere l'una dell'altra. Questo, s'intende, non protegge dall'errore che sta nella specifica invece che nel codice: se la formula scritta è quella sbagliata, due implementazioni fedeli la sbagliano insieme. È il motivo per cui le formule sono pubblicate, e non soltanto i numeri che ne discendono.

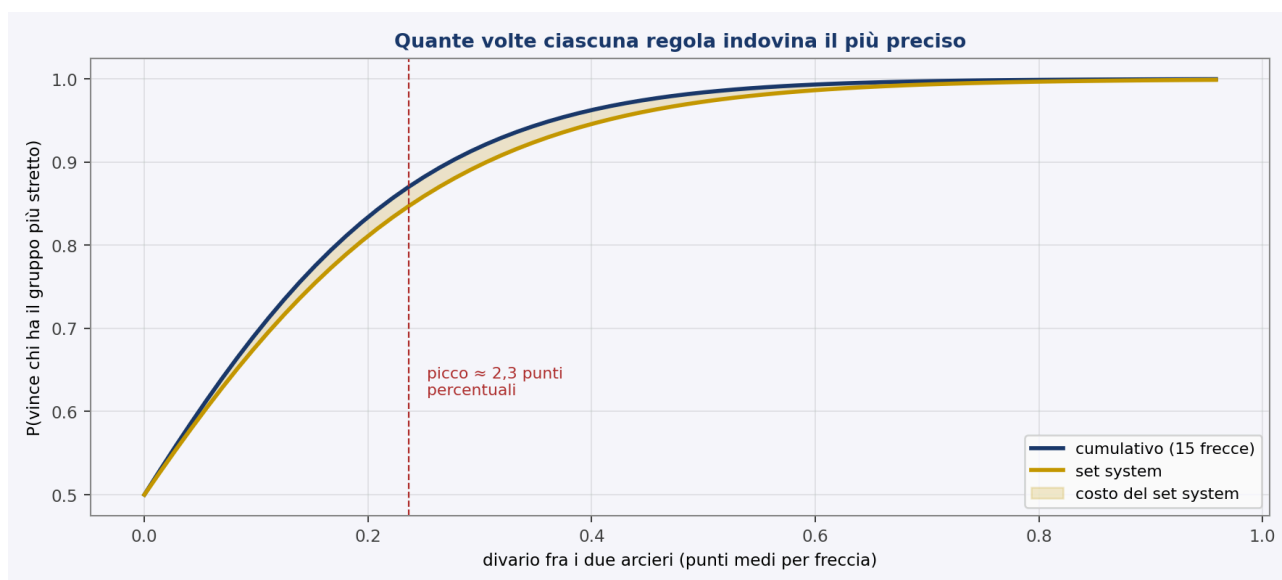
Nessuna di queste verifiche dimostra che il modello descriva bene la realtà: quella è una questione diversa, e i limiti che la riguardano sono elencati più avanti. Dimostrano una cosa più modesta, e comunque necessaria: che i numeri riportati sono davvero ciò che le formule dichiarate producono. Un motore validato può sbagliare perché il modello è sbagliato; non sbaglia perché il conto è inesatto.

Il verdetto: quanto costa il set system

Mettiamo la macchina in moto. Si fissa un arciero forte (un livello da vertice olimpico, 692 punti su 720, che corrisponde a una nuvola di quattro centimetri e un terzo) e si fa crescere poco per volta la nuvola dell'avversario, partendo dalla parità e scendendo. A ogni distacco si chiede a ciascuna delle due aritmetiche la stessa cosa: con quale probabilità incorona il più preciso?

Agli estremi entrambe si comportano come devono: a parità esatta non c'è un più preciso da riconoscere e ciascuna divide i match a metà, e a grande distanza ciascuna è praticamente infallibile. È nel tratto di mezzo che si gioca tutto, e in quel tratto il cumulativo è il giudice migliore, quello che più spesso indovina chi ha il gruppo più stretto (è il discriminatore migliore) anche se il suo vantaggio, come stiamo per vedere, è molto più sottile di quanto la discussione fra arcieri lasci credere.

Conviene fissare subito l'unità di misura, perché tornerà in ogni pagina. Un punto percentuale è un match ogni cento: se una regola indovina ottanta volte su cento e l'altra settantotto, la differenza fra le due è di due punti percentuali, che significa due match su cento e non, come la fretta suggerisce di leggere, due su dieci. Con questa unità in testa, il risultato è che lo svantaggio del set system tocca il massimo a 2,32 punti percentuali, e lo tocca a un distacco intermedio: un avversario attorno ai 675 punti contro i 692 del più forte, cioè poco meno di un quarto di punto di differenza su ogni singola freccia.



Quante volte ciascuna regola indica il più preciso, al crescere del distacco fra i due arcieri. La banda dorata è il costo del set system: nullo a parità, nullo a grande distanza, massimo nel mezzo.

La forma di quella banda dice una cosa preziosa, e libera l'istruttore da un equivoco. Lo svantaggio non è massimo fra arcieri quasi pari, come si crederebbe, ma nel mezzo. Il motivo, una volta detto, è ovvio. Quando due arcieri sono quasi identici, nessun formato al mondo può fare meglio del lancio di una moneta: la sfida è davvero un testa o croce, e risolverla a caso non è un errore di misura, è dire la verità. Quando invece uno è nettamente più forte, ogni regola lo riconosce senza fatica. Solo nella fascia intermedia la scelta del formato ha qualcosa da perdere.

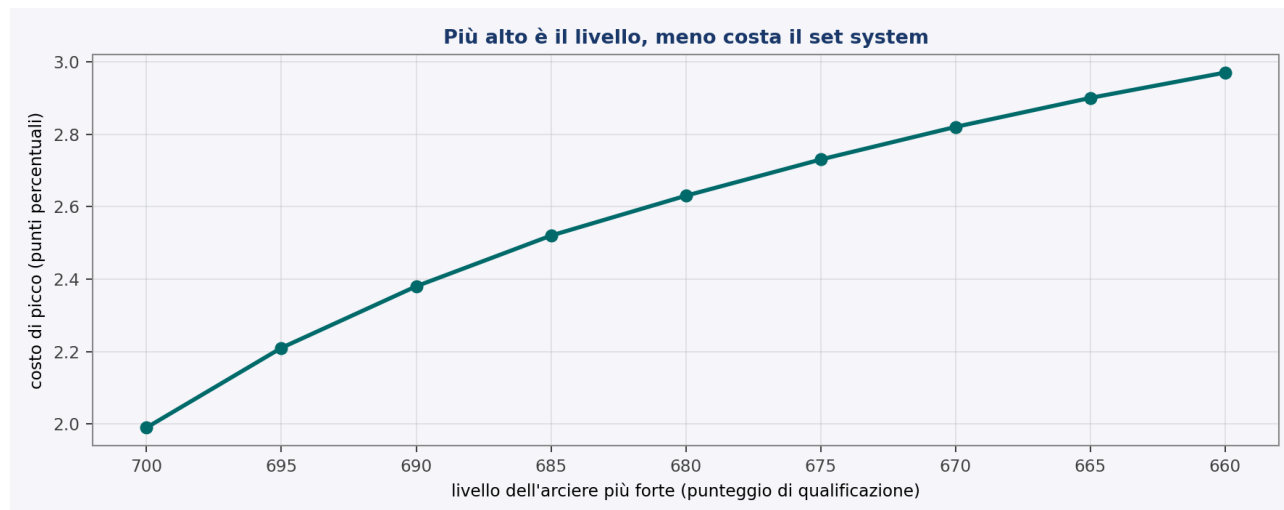
Da qui la prima lezione, forse la più importante per chi tira e per chi allena: una singola sorpresa fra arcieri di valore simile non dimostra nulla. Non che il formato sia ingiusto, non che il perdente fosse più forte, non che il vincitore abbia imbrogliato. Fra quasi-pari la moneta è onestamente in aria, e cade da una parte o dall'altra. Leggere in quel singolo risultato un verdetto sul valore dei due è un errore di misura, non un giudizio sportivo.

Il costo dipende dal livello: quando il set system penalizza di più

C'è un dettaglio che di solito sfugge, e che conviene dire perché impedisce di trattare quel 2,32 come una costante universale. Il costo del set system dipende dal livello assoluto dei due contendenti, non solo dalla loro distanza. E dipende in una direzione che sorprende: più gli arcieri sono forti, meno il formato costa.

livello del più forte	costo di picco
700 punti	1,99 pp
692 punti	2,32 pp
680 punti	2,63 pp
670 punti	2,82 pp
660 punti	2,97 pp

Fra un match di vertice assoluto e un match di buon livello nazionale il costo del formato passa da due punti scarsi a quasi tre. Il motivo è che ad altissimo livello quasi tutte le frecce finiscono nel dieci, i set si somigliano moltissimo, e la differenza fra le due aritmetiche si assottiglia; più in basso, dove il punteggio di un set è più variabile, la regola conta di più. È un'osservazione con una ricaduta pratica: lo svantaggio del set system è minore proprio lì dove il formato viene usato, cioè in cima.



Il costo di picco del set system in funzione del livello dell'arciere più forte. Più il livello sale, più le due aritmetiche si assomigliano.

Il colpevole è la regola dei set, non la brevità del match

A questo punto viene naturale una spiegazione. Il set system, per come è fatto, finisce presto: appena uno dei due tocca i sei punti-set il match è chiuso, e questo può accadere dopo nove o dodici frecce invece delle quindici piene del cumulativo. E vale una legge che ogni scienziato della misura conosce: una misura più corta è una misura più rumorosa. Se il set system decide su meno frecce, si dice, è normale che decida un po' peggio, e la colpa sarebbe della brevità più che del modo di contare.

È una spiegazione ragionevole, ed è falsa. Si smonta con una prova che chiunque può rifare: si prende lo stesso match a set del motore e lo si obbliga a giocare tutti e cinque i set fino in fondo, anche quando uno dei due ha già raggiunto i sei punti, assegnando poi la vittoria a chi ha più punti-set alla fine. Se la brevità costasse qualcosa, la versione lunga dovrebbe discriminare meglio. Non lo fa: le due versioni danno esattamente la stessa probabilità di vittoria, e non per approssimazione: lo scarto fra i due conti è nullo fino all'ultima cifra che il calcolatore sappia scrivere.

La ragione, una volta vista, è elementare, ma conviene affrontarla perché riassunta in una riga sembra saltare un passaggio. Nei cinque set si distribuiscono in tutto dieci punti-set, due per set, comunque vada: due a chi lo vince, uno a testa se finisce pari. Quel totale è fisso, e non serve sapere altro.

Non sempre qualcuno arriva a sei. In un match su cinque fra arcieri di pari livello i cinque set finiscono cinque pari: si tirano comunque tutte e quindici le frecce, si va allo spareggio, e le due versioni del match sono la stessa identica cosa. Il problema si pone soltanto quando uno dei due tocca i sei punti-set, e allora può averci messo tre set, quattro o cinque. In tutti e tre i casi la domanda è la stessa: l'avversario, giocando i set che restano, potrebbe raggiungerlo?

Se il match si è chiuso al terzo set, chi ha vinto li ha vinti tutti e tre e l'avversario è a zero: restano due set, che gliene darebbero al massimo quattro. Se si è chiuso al quarto, gliene ha lasciati al massimo due, perché in quattro set se ne assegnano otto e sei sono suoi: resta un set, al massimo altri due. Se si è chiuso al quinto, gliene ha lasciati al massimo quattro, e non c'è più nulla da giocare. Tre strade diverse, un solo approdo: chi perde non arriva mai oltre i quattro punti-set, contro i sei o più di chi vince, e fra i due resta sempre un margine di almeno due punti.

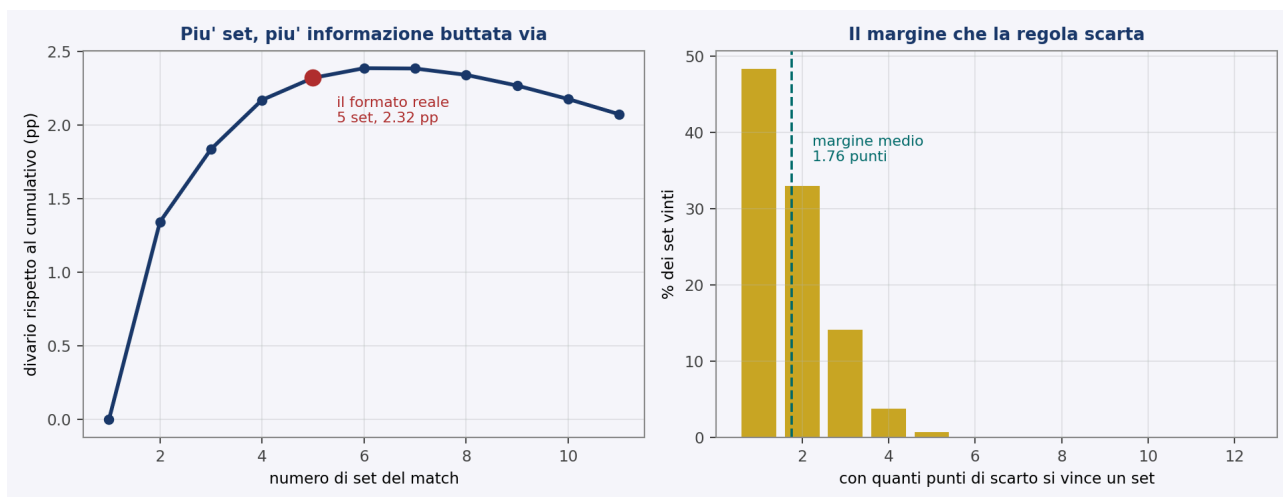
Le frecce che il set system non fa tirare sono esattamente quelle che non avrebbero potuto cambiare il verdetto. Fermarsi presto non è un risparmio che si paga in precisione: è gratis.

Cade così l'attenuante, e il piccolo svantaggio del set system va attribuito per intero, in questo modello, al modo in cui aggrega. Vale allora la pena guardare da vicino che cosa fa quella regola, perché il meccanismo è semplice e sta tutto in una frase: dentro un set, vincere per un punto vale esattamente quanto vincere per dieci. Il margine viene azzerato al confine del set e non passa oltre. Nella fascia dove il formato pesa di più, un set vinto lo si vince in media per 1,76 punti, e in un caso su due per due punti o più: è quell'informazione, ripetuta a ogni set, che il cumulativo conserva e il set system butta via.

La verifica più elegante di questa lettura consiste nel cambiare il numero dei set e guardare che cosa succede. Se la colpa fosse della brevità, allungare il match dovrebbe ridurre lo svantaggio, perché si tirano più frecce. Accade il contrario, e il modo in cui accade dice più della conclusione stessa.

Il caso limite conviene guardarlo per primo. Con un set solo il divario fra i due formati è esattamente zero: chi ha più punti-set e chi ha più punti grezzi sono la stessa persona, perché non c'è nessun confine interno da attraversare. Il costo nasce dal secondo set in poi, cioè nel momento preciso in cui compare il primo muro. Da lì cresce: con tre set contro un cumulativo di nove frecce il divario è di 1,84 punti percentuali, con i cinque set del regolamento e quindici frecce sale a 2,32, con sette set e ventuno arriva a 2,38.

Poi però smette di crescere. A nove set è già ridisceso a 2,27, a tredici a 1,85, a ventuno set (sessantatré frecce) è tornato a poco più di uno. Le forze in gioco sono due e tirano in direzioni opposte. Ogni set aggiunto è un muro in più dove il margine viene cancellato, ma ogni set aggiunto sono anche tre frecce in più, e con abbastanza frecce entrambi i formati diventano quasi infallibili: a ventuno set il cumulativo azzecca il verdetto nel 98,8 per cento dei casi e quello a set nel 97,8, e sopra il cento per cento non si va. Non resta spazio per una grande differenza. Il massimo del prezzo sta dove le due forze si pareggiano, attorno ai sei set, e il regolamento, con i suoi cinque, si è fermato appena prima.



A sinistra: il divario rispetto al cumulativo al variare del numero di set, a parità di frecce fra i due formati. Cresce con i set, il che esclude che dipenda dalla brevità del match. A destra: con quanti punti di scarto si vince un set — il margine che la regola azzerava ogni volta.

Il verdetto è quindi l'opposto di quello che il sentire comune suggerisce, ma anche l'opposto della spiegazione più sofisticata. Non è la brevità: è proprio la regola dei set, quella che tutti additano, a costare quei due punti e tre decimi. La differenza rispetto all'accusa popolare non sta nel colpevole, sta nella misura.

Conviene dire una volta per tutte quanto siano, quei due punti e tre decimi. Nel punto peggiore, un arciero da 692 contro uno da 675, su cento match il punteggio cumulativo indica il più preciso ottantasette volte, e il set system ottantacinque. Due match su cento cambiano padrone: uno ogni quarantatré, ventitré su mille. Un arciero che disputasse cento match di quel tipo in una carriera ne perderebbe due che con l'altra aritmetica avrebbe vinto, e ne vincerebbe altrettanti che avrebbe perso.

E lì si trova soltanto in una fascia intermedia di distacchi. Fra arcieri di pari livello il costo è esattamente zero, perché non c'è un più preciso da riconoscere. A due punti di distacco è mezzo punto percentuale, a cinque poco più di uno, sale fino al massimo attorno ai diciassette, poi ridiscende: a trentacinque punti di distacco è tornato a poco più di uno, a quarantacinque a sei decimi. Chi dice che il set system è una lotteria immagina un effetto da decine di punti percentuali. Il conto ne trova poco più di due, e solo dove i due contendenti sono abbastanza vicini perché la domanda abbia senso e abbastanza distanti perché una risposta esista.

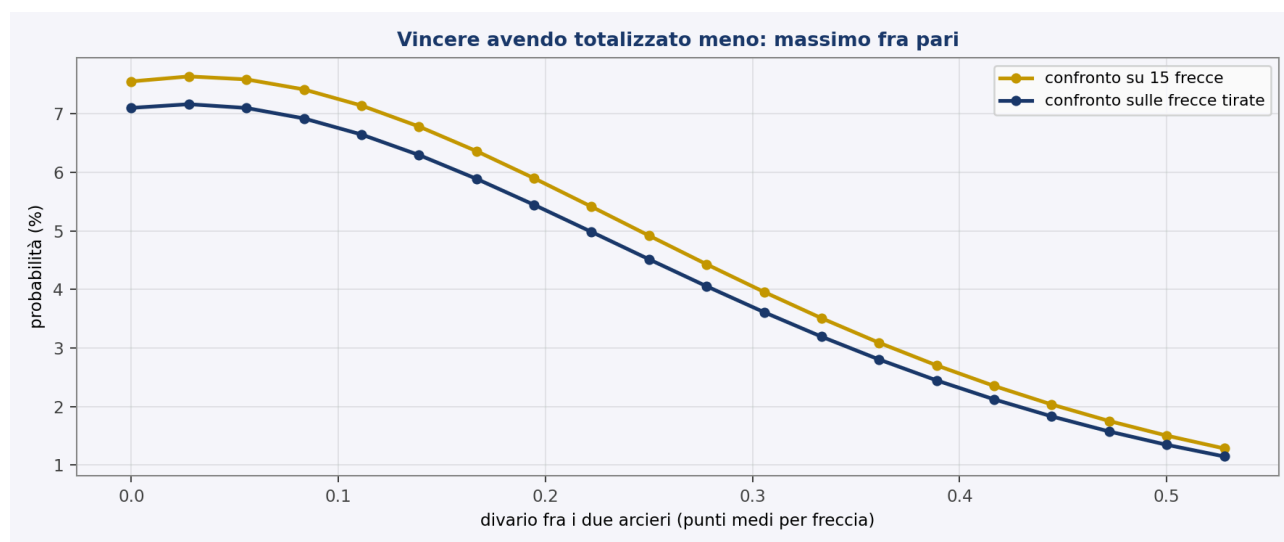
Il paradosso di vincere con meno punti

Torniamo al match di esempio delle prime pagine, quello in cui A totalizzava centoquarantadue punti contro centotrentasei e perdeva quattro a sei. Non era un caso costruito ad arte: è un esito con una frequenza precisa, e ora si può dire quale.

La quantità si chiama tasso di paradosso ed è la probabilità che chi vince ai punti-set finisca con il totale grezzo più basso. Si può misurare in due modi, entrambi legittimi. Il primo confronta i totali sulle frecce effettivamente tirate (nove, dodici o quindici, a seconda di quanto è durato il match) ed è ciò che uno spettatore leggerebbe sul tabellone. Il secondo li confronta su quindici frecce, come se il match fosse andato comunque alla distanza, e risponde alla domanda controfattuale: chi avrebbe vinto se il match fos-

se durato tutti e cinque i set? Non è il regolamento del ricurvo di un tempo, che i match li decideva su dodici frecce: è il cumulativo a quindici, cioè il formato che oggi usa il compound, scelto qui perché confronta le due aritmetiche a parità di frecce massime.

Fra due arcieri di vertice sostanzialmente pari il paradosso vale il 7,1 per cento se si confrontano le frecce effettivamente tirate, e il 7,6 se si immagina il match portato comunque alla distanza: grosso modo un incontro su quattordici. Scendendo di livello la frequenza sale: fra due arcieri pari da 670 punti è già il 9,2 per cento, e da 650 supera il dieci, un match su dieci. Il motivo sta nei margini dei singoli set, che più in basso variano molto di più: fra due arcieri di vertice un set si vince o si perde tipicamente per poco più di un punto, a metà fascia per il doppio. E margini più ballerini rendono più probabile la configurazione che genera il paradosso, cioè una sconfitta larga in un set che convive con vittorie strette negli altri. Nel punto in cui il formato costa di più in termini di discriminazione (un arciere da 692 contro uno da 675, diciassette punti di distacco) il paradosso scende invece al 4,7 per cento, un match su ventuno, e al 5,2 nel confronto su quindici frecce.



Probabilità che il vincitore ai punti-set abbia totalizzato meno dell'avversario, al crescere del distacco. È massima fra pari e svanisce quando uno dei due domina.

C'è però una regolarità che va capita, perché corregge l'indignazione. Il paradosso non è massimo dove il formato è meno efficiente. Il costo di efficienza, l'abbiamo visto, tocca il massimo ai distacchi intermedi; il paradosso invece cresce quanto più i due arcieri sono vicini, e il suo massimo cade in prossimità della parità, dove il costo di efficienza vale zero. Fra due arcieri identici i ribaltamenti sono frequentissimi, uno su quattordici, e nessuno di essi è un errore: non c'è un più preciso da tradire, e chiunque vinca il verdetto è legittimo. Man mano che il divario si apre i ribaltamenti si diradano: uno su ventuno a diciassette punti di distacco, uno su trentatré a venticinque, uno su sessantanove a trentacinque. Il formato dà più scandalo dove sbaglia meno, e sbaglia di più dove lo scandalo si è quasi spento.

La ragione è semplice, e disinnesci la polemica. Perché il vincitore abbia totalizzato meno punti, i due totali devono essere vicini; e sono vicini quando i due arcieri sono vicini. Il paradosso è dunque frequente proprio lì dove nessuno dei due meritava di vincere più dell'altro. Quando invece uno è nettamente più preciso, il suo totale è quasi sempre anche il più alto, e il paradosso svanisce.

Le prove che il risultato non dipende dalla forma della nuvola

Uno scettico, arrivato a questo punto, ha un'obiezione pronta e legittima: tutto poggia su una nuvola perfettamente circolare e centrata sul punto di mira, mentre i gruppi veri sono un po' ovali, più ellittici, a volte spostati di lato, e ogni tanto contengono una freccia completamente fuori posto. Le obiezioni si possono mettere alla prova una per una, deformando il modello apposta e rifacendo il conto a parità di punteggio medio.

modello della nuvola	picco del costo (punti percentuali)
isotropo — cerchio centrato	2,32 pp
anisotropo 1,5:1 — ellisse verticale	2,34 pp
bias 3 cm — centro spostato	2,36 pp
coda pesante — 5% di frecce anomale	0,68 pp

Una precisazione su come si esegue una prova del genere, perché è il punto in cui è facilissimo sbagliare e la lezione vale ben oltre questo caso. Deformare la nuvola non basta: bisogna anche ricalibrarla, cioè restringerla o allargarla finché l'arciere torna a valere esattamente il punteggio medio di prima. Se ci si dimentica di farlo, allungare il gruppo in un'ellisse non lo rende soltanto diverso, lo rende anche peggiore (un arciere da 692 punti, il cui gruppo è allungato in ellisse a un rapporto di uno e mezzo a uno senza ricalibrare, ne vale in realtà 675) e il conto finisce per misurare una differenza di livello mentre crede di misurare una differenza di forma.

La distinzione non è pedanteria, perché cambia la conclusione: senza ricalibrazione la forma sembrerebbe spostare il costo di quattro decimi di punto percentuale, con la ricalibrazione lo sposta di due centesimi. È l'errore che trasforma un'invarianza in un effetto apparente, e vale la pena tenerlo a mente ogni volta che si confrontano due condizioni: si tiene fissa la qualità di chi tira e si varia soltanto ciò che si vuole studiare, altrimenti non si misura la variabile scelta, ma quella che le è scivolata dentro.

Le prime tre righe dicono la stessa cosa in tre modi. Schiacciare la nuvola in un'ellisse con l'asse verticale una volta e mezzo l'orizzontale (la deformazione tipica di chi ha un errore sistematico di allungo o di rilascio) muove il costo di pochi centesimi di punto. Spostare l'intero gruppo di tre centimetri fuori centro, come farebbe un mirino mal tarato o un vento costante non compensato, lo muove di quattro centesimi scarsi. Su differenze così piccole è lecito sospettare che si stia leggendo il rumore del calcolo invece di un effetto, e vale la pena escluderlo. Le righe deformate non hanno una formula esatta e vanno integrate numericamente; ma quell'integrazione, messa alla prova sul caso isotropo dove la formula esatta esiste, la riproduce fino all'undicesima cifra. La distanza fra cerchio ed ellisse è dunque miliardi di volte più grande dell'errore del metodo: piccolissima, ma reale, e misurata. Il risultato non è un artefatto della geometria semplificata, è praticamente indifferente alla forma del gruppo e dipende soltanto da quanto quel gruppo è stretto.

La quarta riga è diversa, e va nella direzione opposta. Se si ammette che il cinque per cento delle frecce sia estratto da una nuvola tre volte più larga (la freccia impazzita, il rilascio sporco, la raffica improvvisa, il sette che non doveva esserci) il costo del set system crolla a 0,68 punti percentuali, cioè a meno di un terzo di quello che era.

Il meccanismo è strutturale e vale la pena averlo chiaro. Sotto il punteggio cumulativo una singola freccia catastrofica ferisce l'intero totale e può decidere la gara. Sotto il set system quella stessa freccia può far perdere al massimo il set in cui è caduta, e nulla di più. Il formato a set funziona come un salvavita: quando c'è un guasto, lo isola invece di lasciarlo dilagare. Il difetto si trasforma in scudo, ed è esattamente ciò che la federazione dichiarò di voler ottenere quando cambiò formato.

Vale la pena chiudere qui un filo lasciato aperto all'inizio. La federazione, quando cambiò formato, disse di volere due cose: impedire che una freccia sfortunata decidesse un match, e premiare la costanza. La prima l'ha ottenuta, e i conti lo confermano. La seconda no, e i conti dicono l'opposto. Si misura mettendo di fronte due arcieri con lo stesso punteggio atteso (identici, dunque, secondo la definizione di bravura che questo lavoro adotta, anche se qui la parola cambia lievemente senso, perché fra due nuvole di forma diversa non esiste un'unica ampiezza da confrontare e l'equivalenza si stabilisce sull'unica grandezza che entrambe hanno, ovvero il punteggio medio che producono) dove però uno tira regolare e l'altro ogni tanto piazza una freccia rovinosa. Sotto il punteggio cumulativo il regolare vince il 48,5 per cento dei match; sotto il set system scende al 45,4. Il verso non cambia né al vertice né più in basso nella fascia.

Le due frasi della federazione sembrano dire la stessa cosa e invece sono opposte: proteggere chi sbaglia una volta significa, inevitabilmente, penalizzare chi non sbaglia mai. Uno scudo non è neutro: protegge qualcuno, e quel qualcuno è chi ha bisogno di essere protetto. Il set system è dunque più clemente, non più severo, con l'arciere incostante: è il prezzo, del tutto coerente, di aver voluto impedire che una sola freccia decidesse una gara.

Resta un'ultima obiezione, quella sullo spareggio: la freccia che decide un cinque a cinque favorisce il più preciso di una quantità che la geometria fissa, ma se quella quantità fosse diversa? La si può trattare come una manopola libera e girarla in tutto l'intervallo plausibile. Da un puro testa o croce, che non porta alcuna informazione discriminante, fino a un forte vantaggio del più bravo, il costo di picco si muove fra 2,96 e 2,14 punti percentuali. Meno di un punto percentuale di escursione da un estremo all'altro, e in nessun caso la conclusione cambia.

Una nota tecnica per chi volesse rifare il conto, perché la mistura si può ricalibrare in più modi e il numero cambia a seconda di quale si sceglie. Qui le due componenti (il grosso delle frecce e il cinque per cento anomalo) vengono riscalate insieme, mantenendo fisso il rapporto di tre a uno fra le loro ampiezze, finché il punteggio medio torna quello di partenza. Riscalando invece il solo nucleo e lasciando la coda ancorata dov'era, il costo scenderebbe ancora di più. In tutte le varianti ragionevoli la conclusione non si muove (la coda pesante taglia il costo a un terzo o meno) ma il valore preciso dipende dalla convenzione, ed è giusto dichiararla.

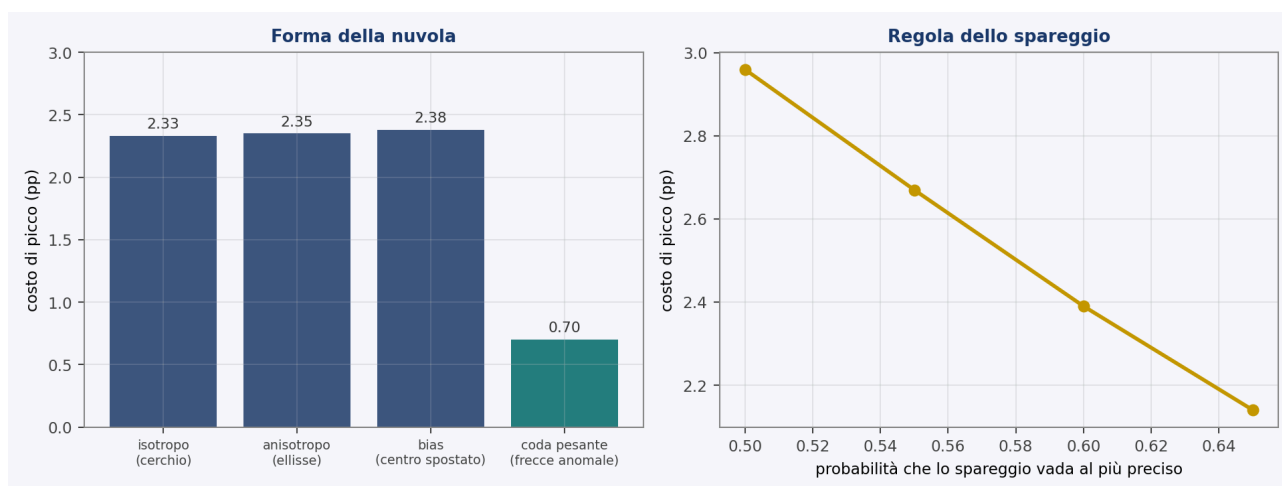
Resta un'ultima prova, la più mirata di tutte, e riguarda proprio la zona che il modello riproduce peggio: il centro. Si parte dalla nuvola circolare (che per come è fatta manda nella X il ventidue per cento delle frecce, e costa i 2,32 punti percentuali della prima riga della tabella qui sopra) e la si deforma addensando progressivamente il centro di entrambi gli arcieri, sempre a punteggio totale invariato, fino a portare dal ventidue al trenta per cento la quota di frecce che il più forte manda nella X. Il costo di picco sale da 2,32 a 3,13 punti percentuali, passando per 2,53 al ventiquattro per cento, 2,74 al ventisei e 2,94 al ventotto. La direzione ha una spiegazione, e non è quella che verrebbe da immaginare. Verrebbe da pensare che addensare le frecce al centro renda i set più spesso pari, e che un set pari, non discriminando nulla,

faccia salire il costo; il conto dice il contrario, i set pari calano. Ciò che cresce è un'altra cosa: a punteggio totale invariato, concentrare più frecce nel cerchietto centrale obbliga le altre a cadere più lontano, e il singolo tiro diventa più variabile. È la stessa condizione che si incontra scendendo di livello, dove il punteggio di un set balla di più e la regola costa di più. L'escursione, comunque, è di otto decimi di punto su una perturbazione che aumenta di oltre un terzo le frecce nel cerchietto centrale, volutamente esagerata.

Anche qui, come per la coda pesante (la freccia impazzita), la costruzione va dichiarata perché il numero preciso ne dipende. I due arcieri vengono addensati dello stesso incremento sopra la percentuale di X che hanno per natura, con metà delle frecce assegnate alla componente stretta, e ciascuno viene poi ricalibrato al proprio punteggio di partenza; a incremento nullo entrambi tornano la nuvola circolare pura, ed è il motivo per cui la prima riga coincide al millesimo con l'isotropo della tabella precedente. Perché una costruzione sia accettabile deve soddisfare due requisiti: trattare i due arcieri allo stesso modo, e ridursi alla nuvola circolare quando la perturbazione è nulla. Fra quelle che li rispettano la curva sale sempre, di circa otto decimi di punto sull'intervallo, e cambiano soltanto i decimi intermedi: abbiamo provato due parametrizzazioni distinte e concordano sugli estremi. Abbandonando quei requisiti, per esempio portando entrambi gli arcieri alla stessa percentuale assoluta di X invece che allo stesso incremento, si ottengono numeri fuori scala e una curva che scende: non è una convenzione alternativa, è una costruzione sbagliata, ed è utile saperlo perché mostra quanto la scelta pesi.

A questo punto però il lettore attento ha in mano tre risultati che sembrano litigare fra loro, e vale la pena metterli in fila perché la loro composizione dice qualcosa che nessuno dei tre dice da solo. Scendere di livello aumenta la variabilità del tiro e fa salire il costo del set-system. Addensare il centro aumenta la variabilità e fa salire il costo. Ma le frecce anomale aumentano la variabilità più di entrambe (più che a passare dal vertice alla fascia media) e il costo invece crolla a meno di un terzo. Se la regola fosse «più il tiro balla, più il set system perde», l'ultimo caso la smentirebbe.

Nei modelli a frecce indipendenti esaminati qui, ciò che conta non è quanta variabilità c'è, ma dove sta. La variabilità ordinaria, quella che allarga il gruppo di tutti i giorni, che si trovi scendendo di livello o addensando il centro, si distribuisce su tutte le frecce, entra in ogni set, e la struttura a set non può farci nulla: la subisce come la subirebbe il cumulativo, e in più ci butta sopra il margine. La variabilità catastrofica è un'altra cosa: sta in poche frecce rovinose, rare e isolate, e proprio perché sono isolate finiscono ciascuna in un set diverso, dove il danno si ferma. È il motivo per cui lo stesso formato che paga la variabilità diffusa guadagna su quella estrema, e i tre risultati, invece di contraddirsi, sono tre facce dello stesso meccanismo. Le due leve che uno scettico tirerebbe per prime, lo spareggio e la densità centrale, muovono il risultato in direzioni opposte, e anche tirate fino in fondo lo lasciano fra i due e i tre punti percentuali abbondanti.



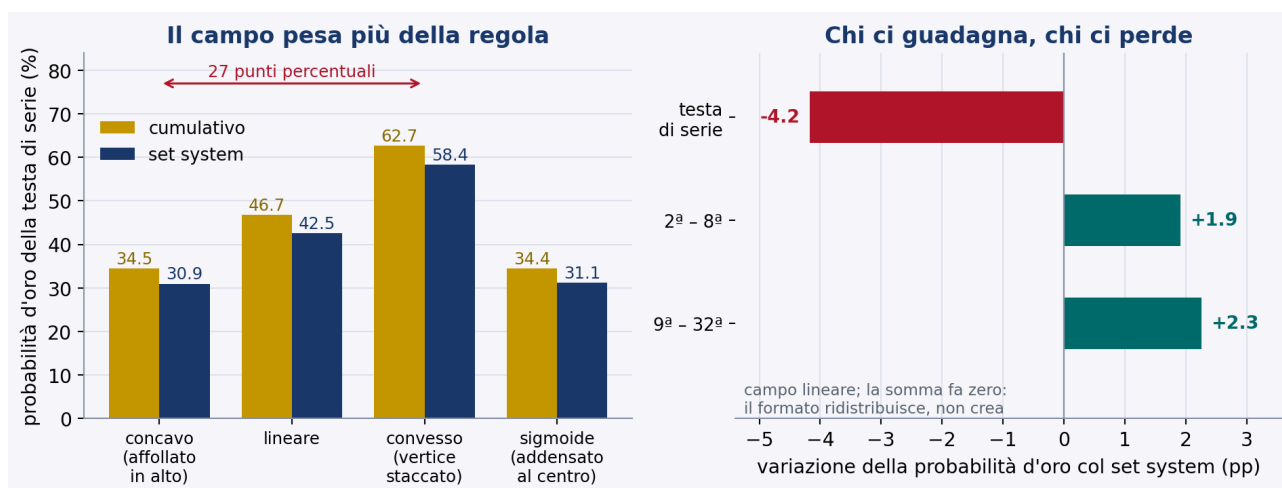
A sinistra il costo di picco sotto quattro forme diverse della nuvola: le prime tre coincidono, solo le frecce anomale lo cambiano davvero. A destra l'effetto della regola dello spareggio, tirata da un estremo all'altro.

Sei match di fila: che cosa succede a un torneo intero

Tutto quello che si è visto finora riguarda un match solo. Ma un titolo non si vince con un match: si vince con sei, uno dopo l'altro, e chi ne perde uno torna a casa. Se il formato sposta due incontri su cento, viene naturale chiedersi che cosa diventino quei due incontri quando li si mette in fila per sei turni, e se lungo il percorso si accumulino o si compensino.

La domanda si calcola come tutto il resto, senza tirare una freccia. Si costruisce un campo di sessanta-quattro arcieri, si ricava da ogni punteggio la sua ampiezza di nuvola, si calcola per ogni possibile incontro la probabilità che l'uno batta l'altro (con entrambe le aritmetiche) e si propagano quelle probabilità sull'albero del tabellone, turno dopo turno, fino all'oro. Il conto resta esatto: non si simulano tornei, si sommano tutti i percorsi possibili pesati per quanto sono probabili.

Resta da decidere che campo mettere in gara, e qui la scelta è più delicata di quanto sembri: il risultato dipende non solo da quanto è forte il primo, ma da come sono distribuiti tutti gli altri sotto di lui. Per non appoggiarsi a una griglia particolare, il calcolo è stato rifatto su quattro campi diversi, costruiti tenendo fissi il vertice a 692 e l'ultimo a 624 e cambiando soltanto il modo in cui i sessantadue in mezzo riempiono lo spazio. Un campo *concavo* ha molti rivali raccolti appena sotto il primo; uno *convesso* ha il vertice staccato e una lunga coda verso il basso; la *lineare* li distribuisce uniformemente; la *sigmoide* li addensa a metà classifica. Nessuno dei quattro è un campo reale: sono quattro forme costruite apposta per vedere se la conclusione dipenda dalla compagnia.



A sinistra: la probabilità che la testa di serie vinca l'oro, nei quattro campi e con le due aritmetiche. A destra, per il campo lineare, dove finisce la probabilità che il favorito perde passando al set system: le tre barre sommano a zero, perché un torneo assegna un oro comunque.

Il primo risultato è che il verso non cambia mai. In tutti e quattro i campi il punteggio cumulativo porta il favorito all'oro più spesso del set system, e la differenza resta sempre nella stessa fascia stretta:

campo	a set	cumulativo
concavo	30,9 %	34,5 %
lineare	42,5 %	46,7 %
convesso	58,4 %	62,7 %
sigmoide	31,1 %	34,4 %

Fra tre virgola tre e quattro virgola tre punti percentuali, in situazioni che fra loro non si somigliano affatto. Sei turni non hanno amplificato il divario del singolo match né lo hanno cancellato: l'effetto attraversa il tabellone restando dell'ordine di grandezza da cui era partito.

Il secondo risultato è più interessante, e si legge nella colonna di sinistra invece che nella differenza. Passando da un campo concavo a uno convesso la probabilità d'oro del favorito passa dal trentuno al cinquantotto per cento: ventisette punti percentuali, contro i quattro che separano le due aritmetiche. **Chi altro c'è in gara pesa quasi dieci volte più della regola con cui si contano i punti.** È un'osservazione che vale la pena tenere accanto a tutta la discussione sul formato: si litiga su una regola che sposta quattro punti percentuali mentre il sorteggio della griglia, cioè chi ti capita intorno, ne sposta ventisette.

Il terzo risultato risponde a una domanda che nessuno aveva ancora posto: quei quattro punti che il favorito perde, dove vanno? Un torneo assegna un oro comunque, quindi la probabilità non sparisce, si sposta. Nel campo lineare il primo perde 4,2 punti percentuali, il gruppo dalla seconda all'ottava testa di serie ne guadagna 1,9, e il gruppo dalla nona alla trentaduesima ne guadagna 2,3. Il set system, in altre parole, **trasferisce probabilità dal favorito agli outsider**, e ne trasferisce di più al gruppo lontano che a quello immediatamente sotto.

Non è un fatto nuovo travestito: è lo stesso meccanismo già visto due volte, guardato dall'alto. Un formato che confina il danno di una freccia dentro il set in cui cade protegge chi sbaglia; un formato meno

preciso nel riconoscere il più bravo lascia più spazio a chi bravo lo è meno. Sul tabellone quella protezione diventa visibile come una redistribuzione, e ha il segno che ci si aspetta: verso il basso.

Vale la pena dire che questa è, di tutte, l'osservazione più vicina a ciò che la federazione dichiarava di volere nel 2010: match più aperti, esiti meno scontati, sorprese più frequenti. Su quel piano il set system funziona, e funziona esattamente per la ragione per cui misura peggio. Sono la stessa proprietà con due nomi diversi, e quale dei due usare non è una questione che un calcolo possa decidere.

Quanti punti servono per sapere chi è più bravo

Fin qui abbiamo trattato l'ampiezza della nuvola come se fosse un dato noto, e non lo è: è questa, anzi, la parte del ragionamento che ha le conseguenze più pratiche di tutte, e che più di ogni altra cambia il modo di leggere una classifica.

Un round di qualificazione è fatto di settantadue frecce, e settantadue frecce sono un campione finito come tutti gli altri. Il punteggio che ne esce non è la bravura dell'arciere: è la sua bravura più il caso di quel pomeriggio. La domanda diventa allora: quanto pesa quel caso?

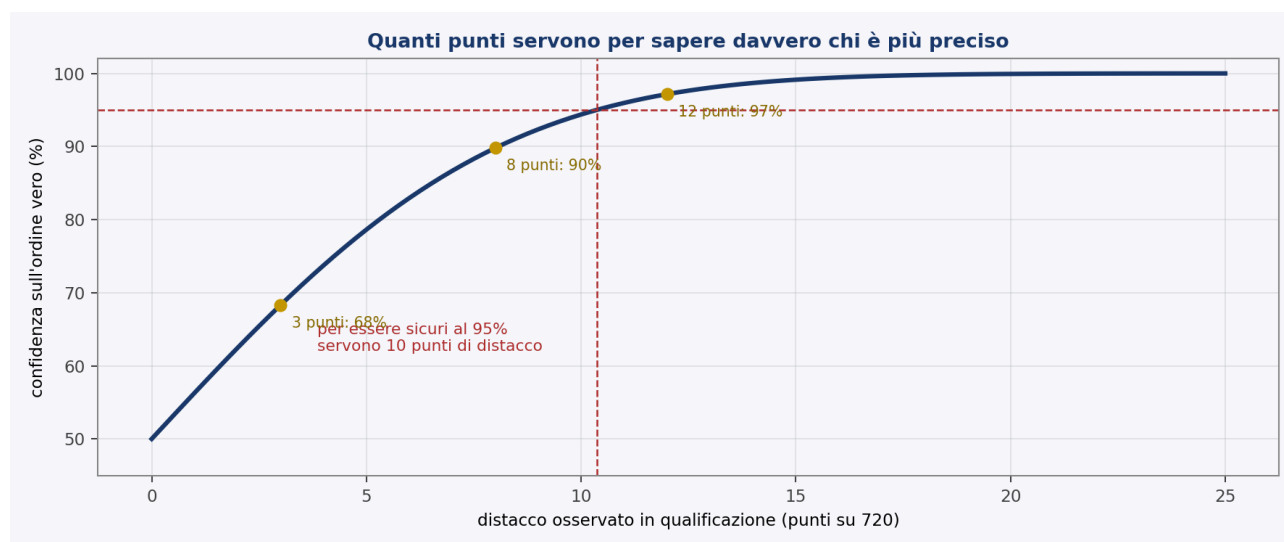
Il perché sta già nella mappa di prima, ed è il momento di esplicitarlo: un punto di qualificazione vale sette decimi di millimetro di gruppo, quindi due arcieri separati da tre punti in classifica differiscono di due millimetri scarsi di ampiezza. Chiedere a settantadue frecce di risolvere due millimetri è chiedere troppo. La risposta si calcola, e conviene arrivarci per gradi. Prendiamo due arcieri di vertice che siano davvero, esattamente identici (stessa nuvola, stessa bravura, nessuna differenza di alcun genere) e facciamoli tirare settantadue frecce ciascuno, come in una qualificazione vera. Il distacco che comparirà fra loro in classifica, prodotto per intero dal caso e da nient'altro, sarà in media di cinque punti, e una volta su tre supererà i sei e mezzo: non uno o due, come verrebbe spontaneo immaginare, fra due persone che sul bersaglio sono esattamente la stessa cosa.

distacco in qualifica	confidenza sull'ordine vero
1 punto	56%
3 punti	68%
5 punti	79%
8 punti	90%
12 punti	97%
16 punti	99%

Serve un distacco di una decina di punti abbondanti prima di poter dire, con la sicurezza convenzionale del novantacinque per cento, chi dei due è davvero il più preciso. Sotto i cinque punti si sta in gran parte leggendo rumore. E ogni volta che due arcieri consecutivi in una classifica sono separati da uno, due, tre punti (la situazione ordinaria in qualunque griglia serrata) il loro ordine reciproco è sostanzialmente indeterminato.

Su questi numeri vanno dette due cose, e tutte e due li rendono più severi, non meno. La prima riguarda ciò che il conto assume di non sapere: la confidenza è calcolata come se dei due arcieri non si sapesse nulla in partenza, cioè come se, prima di guardare i punteggi, ogni valore della differenza fra i due pun-

teggi attesi fosse altrettanto plausibile. Ma in una griglia di gara si sa benissimo che i concorrenti vicini in classifica sono quasi sempre vicini anche per valore, e tenerne conto renderebbe un distacco osservato ancora meno probante di quanto la tabella dichiara. La seconda: il conto misura soltanto il caso freccia per freccia, tenendo la forma dell'arciere perfettamente costante dal primo tiro all'ultimo: è il rumore che resterebbe se l'unica fonte di variazione fosse la dispersione della nuvola. Nella realtà vi si somma tutto ciò che il modello non guarda (il sonno della notte prima, il vento che gira, la condizione di quel pomeriggio, la testa) e quasi tutte allargano la forchetta invece di stringerla. Con un'eccezione che conviene dire, perché va nel verso opposto: un disturbo che colpisce entrambi gli arcieri nello stesso modo — il vento che gira per tutti, la luce che cala sul campo — in parte si cancella nella differenza fra i due punteggi, e rende quel distacco più informativo, non meno. Il segno netto della somma di tutto ciò che il modello non guarda è dunque una questione empirica, non una conseguenza del conto. Resta che le fonti individuali sono le più numerose: i cinque punti di distacco medio, e i dieci che ne discendono come soglia, vanno letti come una stima ottimistica dell'ambiguità vera di una classifica di qualificazione.



Confidenza sull'ordine vero di due arcieri in funzione del distacco osservato in qualificazione. Sotto i cinque punti la classifica dice quasi nulla; per la sicurezza del 95% ne serve una decina abbondante.

Questa è, per un istruttore, l'informazione più immediatamente utilizzabile di tutto il lavoro, e vale ogni volta che si guarda una classifica. Se il vostro atleta ha chiuso quarto invece che secondo e fra lui e il secondo corrono tre punti, quel distacco, da solo, non basta a stabilire una differenza stabile di precisione; se invece è arrivato dodicesimo invece che quarto, con quindici punti di distacco, quello è un segnale che vale la pena capire.

E rimette in proporzione l'intera discussione da cui siamo partiti. Ci si è accapigliati su un'aritmetica che sposta gli esiti di due punti percentuali, mentre lo strumento che stabilisce chi è il favorito, il round di qualificazione, lascia indeterminato l'ordine di quasi tutte le coppie vicine. Il set system è un giudice leggermente grezzo che lavora su una graduatoria d'ingresso molto più grezza di lui.

C'è però una via d'uscita, e non richiede di tirare meglio: richiede di misurare di più. Il caso di una singola gara non si può togliere, ma si può diluire facendo la media di più gare, e la diluizione è rapida: la variabilità della media scende con la radice del numero di round, quindi quattro gare la dimezzano e nove la riducono a un terzo. La domanda pratica diventa allora quante gare servano, prima e dopo un cambiamento tecnico, perché un miglioramento di una data entità diventi dimostrabile.

Il conto è lo stesso di prima, applicato alle medie invece che ai singoli totali. Per un arciere che tira intorno a 650, ecco quante gare occorrono per periodo:

miglioramento vero	gare per periodo
3 punti	29
5 punti	11
8 punti	5
10 punti	3
15 punti	2

La lettura è dura ma utile. Tre punti guadagnati in una stagione sono un ottimo lavoro tecnico, e servono una trentina di gare per dimostrarli: in pratica, due stagioni. Dieci punti bastano tre gare per periodo. Fra questi due estremi sta tutta la differenza fra un allenatore che valuta un cambiamento su un blocco di misure e uno che lo valuta sulla domenica successiva.

Il livello, di nuovo, sposta tutto. Lo stesso miglioramento di tre punti, per un arciere da 690, richiede tredici gare invece di ventinove, perché il suo totale oscilla meno. Chi ha più bisogno di capire se sta migliorando — l'arciere che sta ancora cambiando molte cose — è anche quello a cui il punteggio risponde più lentamente.

Ne segue una regola operativa che vale la pena enunciare per intero, perché è la conseguenza pratica più immediata di tutto questo capitolo: un cambiamento tecnico non si giudica sul punteggio nel breve periodo, perché nel breve periodo il punteggio non ha la risoluzione per vederlo. Lo si giudica su ciò che si osserva direttamente — la ripetibilità del gesto, la forma del gruppo, il video — e si lascia al punteggio, mediato su un blocco abbastanza lungo, il compito di confermare mesi dopo che quel cambiamento è arrivato fino al bersaglio.

Ciò che il modello non vede

Resta la cosa più importante, e riguarda non ciò che il modello misura male, ma ciò che ha deciso di non guardare affatto.

Ogni numero calcolato finora poggia su un modello deliberatamente falso. Nei conti ogni freccia è indipendente dalla precedente, estratta sempre dalla stessa nuvola, senza nervi, senza stanchezza, senza slancio, senza crolli. La bravura è una sola quantità fissa, immutabile dal primo turno alla finale. È un mondo di pura meccanica del tiro, in cui l'arciere è una macchina che ripete lo stesso gesto.

Gli arcieri veri non sono così, e nessuno lo sa meglio di chi ha tirato in gara. Ci si irrigidisce quando la posta in gioco sale, si trova il ritmo o lo si perde, un set vinto di misura può accendere una rimonta e un set perso per una freccia può far crollare tutto il resto. Perché allora costruire di proposito un modello che ignora esattamente questo?

Perché è il modo di rendere visibile l'invisibile. Il modello fornisce la linea di base della sola precisione: quante sorprese ci sarebbero se il tiro con l'arco fosse soltanto geometria e ripetizione. Nella realtà le sorprese sono di più. E quella differenza, lo scarto fra le sorprese previste e quelle che accadono dave-

ro, non è rumore da scartare, ma una misura vera e propria: la misura di quanto pesi tutto ciò che il modello ha deliberatamente lasciato fuori.

Il gioco mentale (quella cosa vaga di cui tutti parlano e che nessuno sa afferrare) smette qui di essere vago. Diventa un *residuo*: si prendono i ribaltamenti realmente osservati, si sottraggono quelli che la pura precisione giustifica, e ciò che resta è il contributo della pressione competitiva. La psicologia del tiro non è più un'aura attorno alla prestazione: è la distanza fra il modello e il mondo, ed è una quantità con un numero.

Vale la pena aggiungere che nulla di tutto questo è proprio del solo tiro con l'arco. Qualsiasi formato di punteggio, in qualsiasi sport, è un modo di stimare una qualità nascosta, e le questioni di equità sono, in questa luce, questioni di risoluzione di misura: la stessa macchina che qui abbiamo puntato sul bersaglio si usa da decenni per studiare il tennis e gli altri sport di racchetta. Il tiro con l'arco è solo un caso insolitamente pulito, perché la qualità nascosta è a una dimensione sola e ha una forma geometrica visibile a occhio nudo. Che il modo di ragionare si trasferisca è però un'affermazione sul metodo, non un risultato: qui è stato calcolato il ricurvo a settanta metri e nient'altro, e ogni altro sport andrebbe rifatto da capo con la sua geometria e le sue regole.

I limiti

Tre confini vanno detti, perché un numero senza i suoi limiti è una mezza verità.

Il primo è l'indipendenza delle frecce. È una scelta di modello, non una descrizione degli arcieri; serve a isolare l'aritmetica dalla psicologia, e i risultati vanno letti come un controfattuale (la risposta alla domanda «che cosa sarebbe successo se», calcolata invece che immaginata), non come una previsione di ciò che accade in gara. Un formato a set premia anche comportamenti diversi: chiudere un set già vinto senza rischiare, aggredire quando si è sotto, gestire il ritmo in altro modo. Il modello tiene ferme le frecce e cambia solo il modo di contarle; è esattamente ciò che serve per isolare l'effetto dell'aritmetica, ed è esattamente ciò che gli impedisce di prevedere il comportamento.

Il secondo è la geometria idealizzata, ed è quello su cui siamo più tranquilli, perché è stato messo alla prova: ellisse, centro spostato e code pesanti cambiano il numero di qualche centesimo o lo riducono di oltre due terzi, senza mai ribaltare la conclusione.

Il terzo è il più importante da dichiarare, ed è una scelta prima che un limite. Qui non si calcola nulla su nessuna gara realmente disputata: tutto discende dalla geometria del bersaglio, dalle regole pubblicate e dal modello di dispersione. Ciò rende ogni conclusione generale (vale per due arcieri qualsiasi a quel livello, non per un match particolare), ma significa anche che questo lavoro non racconta nessuna storia, non ricostruisce nessun torneo e non dice che cosa sia successo in nessuna occasione specifica. Dice come si comporta lo strumento, non che cosa ha misurato.

Che cosa portarsi a casa

Restano, per chi tira e per chi insegna, alcune lezioni concrete.

Per l'arciere. Togliere il colpo disastroso resta la cosa che rende di più, ma per una ragione diversa da quella che si può immaginare: rende perché alza il vostro punteggio, non perché il formato vi premi per la costanza. Su questo i conti dicono l'opposto dell'intuizione, e l'abbiamo già quantificato: a parità di punteggio atteso il set system favorisce l'arciere irregolare di circa tre punti percentuali, perché isola il danno di una freccia dentro il set in cui è caduta. Non aspettatevi che il regolamento vi ricompensi per essere costanti: la ricompensa della costanza sta nel punteggio, non nel formato. E non leggete in una singola sconfitta contro un pari un giudizio sul vostro valore: fra quasi-pari la moneta è onestamente in aria per tutti.

Per l'istruttore. Un risultato di match è un campione rumoroso, non un verdetto sull'abilità: anche col metodo più accurato dei due, su quindici frecce il più preciso perde con regolarità. E la classifica di qualificazione è rumorosa quanto il match. Tenete a mente il numero che vale più di tutti gli altri: sotto i cinque punti di distacco su settantadue frecce, la classifica dice poco più di nulla sull'ordine di bravura, sotto gli otto resta un'indicazione debole, e per una conclusione sicura ne servono una decina abbondante. Un piazzamento non è un giudizio: è una stima con una barra d'errore, e quella barra è più larga di quanto qualunque tabellone lasci intuire. Valutate la crescita di un atleta su molte frecce, le medie in allenamento, i round lunghi, la stagione, non su una singola eliminazione diretta.

La distanza fra il gruppo e il risultato

Tirando le somme, il quadro che emerge è sobrio. Il set system è uno strumento di misura appena più grezzo della somma dei punti: nel modello isotropo costa fra i due e i tre match su cento in capacità di riconoscere il più preciso, e costa meno quanto più alto è il livello a cui viene applicato. Non è il randomizzatore del sentire comune, e non è nemmeno neutro: è uno scambio ponderato, che cede una scheggia di precisione in cambio di robustezza contro la freccia disastrosa (quando le frecce anomale ci sono, il suo svantaggio si riduce a meno di un terzo) e di un match in cui il danno di una freccia resta confinato nel set in cui cade. Se quello scambio valga la pena non lo decide un modello, lo decide uno sport. Il modello dice quanto costa.

Quel costo, poi, viene per intero dalla regola dei set e non dal fatto che il match finisca prima: obbligare i due arcieri a tirare tutti e cinque i set non cambia di una virgola chi vince, perché le frecce risparmiate sono esattamente quelle che non potevano più cambiare nulla. Il prezzo lo paga il margine azzerato a ogni confine di set. E il paradosso che fa arrabbiare gli spettatori, il vincere avendo totalizzato meno, riguarda circa un match su quattordici fra arcieri di pari livello, e si concentra proprio là dove nessuno dei due meritava di vincere più dell'altro.

Ma il risultato che pesa di più non riguarda il formato. Riguarda ciò che sta prima: la classifica di qualificazione, quella che stabilisce chi è il favorito e chi incontra chi, porta un'incertezza molto più grande dell'effetto attribuibile all'aritmetica di cui si discute. Due arcieri identici finiscono separati in media da cinque punti per puro caso, e ne servono una decina abbondante prima di poter dire con sicurezza chi è il migliore. Il formato è la parte visibile e discussa di un meccanismo la cui parte più approssimativa nessuno guarda mai, ed è il genere di sproporzione che solo un conto esplicito riesce a far vedere.

E resta, per sottrazione, la cosa più grande. Se questa è la quota di sorprese che la sola geometria del tiro giustifica, tutto ciò che accade in più sui campi di gara, il campione eliminato al primo turno, la rimonta impossibile, il crollo dell'ultimo set, vive altrove. La tecnica la vedete sul bersaglio, e adesso sappiamo

misurarla, con le sue barre d'errore. Il resto si allena da un'altra parte. Ed è esattamente lì, in quella distanza fra il gruppo e il risultato, che si inizia a parlare di sport.

Nota su dati, fonti e metodo

Questo lavoro non utilizza dati personali di alcun tipo, e non ne ha bisogno. Non contiene punteggi di arcieri reali, non fa riferimento a risultati di gare disputate, non nomina alcun atleta e non ricostruisce alcuna classifica. Ogni numero discende da tre soli ingredienti, tutti pubblici e tutti impersonali: la geometria del bersaglio, fissata dal regolamento; le regole dei due formati di gara, anch'esse regolamentari; e un modello matematico della dispersione dei tiri.

I livelli di punteggio citati — 692, 675, 665 e simili — non appartengono a nessuno: sono valori di riferimento scelti per collocare il ragionamento nella fascia in cui si tira davvero, allo stesso modo in cui in un manuale di fisica si sceglie una massa di un chilogrammo. Servono a rendere concreti i conti, non a descrivere una prestazione.

Le uniche informazioni prese dalla documentazione ufficiale della federazione internazionale sono di natura regolamentare: le dimensioni del bersaglio e degli anelli, la distanza di tiro, la struttura del round di qualificazione e del tabellone, il funzionamento del set system e dello spareggio, e le ragioni dichiarate dietro il cambio di formato del 2010.

I calcoli sono prodotti dal motore descritto nel capitolo dedicato. Il pacchetto di riproduzione distribuito insieme al lavoro contiene la specifica matematica di ogni formula, i test in forma chiusa, uno script che ricalcola e confronta uno per uno tutti i valori pubblicati in queste pagine e la seconda implementazione indipendente con il proprio confronto; dichiara l'ambiente con cui i numeri sono stati congelati ed è scaricabile dal sito, così che chiunque possa rifare i conti, contestarli o estenderli, e chi individuasse un errore trova i recapiti sul sito. Le regole sono verificate sull'edizione del rulebook World Archery in vigore dal 27 gennaio 2026, nella versione aggiornata pubblicata il 13 marzo 2026, Libro 3.

Una precisazione di merito, che discende dai conti stessi e non da una preoccupazione esterna. La sezione sull'incertezza mostra che un punteggio di qualificazione è un indicatore rumoroso della bravura di chi l'ha realizzato: sotto gli otto punti di distacco, dove la confidenza resta sotto il novanta per cento, non contiene informazione solida sull'ordine, con il modello e il prior dichiarati. Ne segue una regola di prudenza che vale ben oltre queste pagine: un punteggio racconta com'è andata quella giornata, non quanto vale chi l'ha tirato, e non va usato per giudicare una persona.

Appendice matematica

Il saggio mostra una formula sola, quella che traduce l'ampiezza di un gruppo nella probabilità di fare dieci, o nove, o otto. È una scelta deliberata: è l'unica di cui serve la vista per capire da dove viene tutto il resto.

Qui ci sono le ventiquattro formule che il motore valuta per produrre ogni numero stampato in quelle pagine, sono la traduzione completa, con abbastanza contesto perché un lettore che non fa il matematico di mestiere capisca che cosa dice ciascuna, perché è fatta così, e che cosa non è in grado di dire. Chi volesse soltanto ricalcolare può saltare la prosa e prendere le formule; chi volesse capire come funziona una misura di questo tipo troverà che la prosa è la parte utile.

Come è fatta ogni voce

*Ogni formula ha almeno quattro parti. **In parole** dice che cosa si calcola, senza simboli. **La formula** la mostra. **Da dove viene** ricostruisce il passaggio che la genera, di solito in due righe. **Un numero** la applica a un caso concreto, quasi sempre l'arciere da 690 o la coppia 692 contro 675 che il saggio usa come esempio ricorrente, così che ogni formula abbia almeno un valore verificabile. Dove serve, un riquadro elenca che cosa non copre: i confini oltre i quali quella formula smette di valere.*

In fondo a ciascuna trovi il nome della funzione che la implementa nel pacchetto di riproduzione.

Notazione e unità

Il lavoro attraversa tre unità di misura, e confonderle è il modo più rapido di ottenere numeri assurdi. La geometria del bersaglio è in millimetri sul piano del bersaglio. Il motore lavora in milliradiani, cioè in angoli, perché così le for-

mule valgono a qualunque distanza. Il saggio parla in centimetri, perché è la lingua in cui un arciere guarda il proprio gruppo. Il ponte è semplice: a settanta metri un milliradiante sottende sette centimetri.

simbolo	che cosa è
σ	ampiezza della nuvola: la deviazione standard degli impatti per asse . Non il raggio del gruppo, non il suo diametro.
ρ, r	distanza dal centro. ρ in milliradiani, r in millimetri o centimetri.
w	larghezza di un anello: 61 mm, cioè 6,1 cm.
D	distanza di tiro, sempre 70 m in queste pagine.
$F(\rho)$	probabilità che una freccia cada entro il raggio ρ .
p_v	probabilità che una singola freccia valga esattamente v punti.
μ	punteggio atteso di una freccia; il totale su 72 frecce è 72μ .
S, T	punteggio di una volée (3 frecce) e di un round (72 frecce).
$\pi_{\text{set}}, \pi_{\text{cum}}$	probabilità che il più preciso vinca, con i due formati.
Δ	costo del formato: la differenza fra le due, in punti percentuali.
Φ	funzione di ripartizione della normale standard.

Le formule si leggono in ordine, perché ciascuna usa la precedente. Il percorso è una catena sola: dalla geometria del bersaglio si arriva alla probabilità di ogni punteggio, da lì al punteggio atteso, e invertendo si torna dall'ampiezza al punteggio. Da quel punto in avanti si costruiscono i due formati di gara, e dal loro confronto escono tutti i numeri pubblicati.

gruppo	che cosa contiene
F01–F05	La geometria del bersaglio e il modello della nuvola. Come si passa da millimetri ad angoli, che forma ha la dispersione, qual è la probabilità di cadere entro un certo raggio.
F06–F09	Il ponte fra la nuvola e il punteggio, nei due versi. È qui che sta la formula pubblicata nel saggio.
F10–F15	I due formati di gara: la volée, il set, il match a set risolto per induzione all'indietro, il cumulativo, lo spareggio, la durata attesa.
F16–F21	Le grandezze che il saggio pubblica: il costo del formato, il margine dei set, il teorema sull'arresto anticipato, il paradosso, il rumore della qualificazione.
F22–F24	Le prove di robustezza e i tornei simulati: forme deformate, densità centrale, campi parametrici e propagazione sul tabellone.

Parte prima — Il bersaglio e la nuvola

Cinque formule per dire due cose: com'è fatto il bersaglio, e come si descrive matematicamente un gruppo di frecce.

F01 · La geometria del volto

In parole. Il bersaglio da settanta metri è un disco di 122 centimetri diviso in dieci corone concentriche tutte della stessa larghezza. È questa uniformità che rende semplice tutto il resto: gli anelli non sono un elenco di numeri da ricordare, sono i multipli di un numero solo.

$$R_k = W \cdot K, K = 1, \dots, 10 \quad V_k = 11 - K$$

$$w = 61 \text{ mm} \quad r_x = 30,5 \text{ mm}$$

Da dove viene. Il raggio esterno dell'anello k -esimo è k volte la larghezza w . Il valore che quell'anello attribuisce è 11 meno k : il primo anello vale dieci, il secondo nove, e via così fino al decimo che vale uno. Al centro c'è un cerchio ulteriore di $30,5 \text{ mm}$ di raggio, esattamente metà di un anello, che si chiama X : vale dieci punti come il resto della corona e serve a dirimere le parità.

Un numero. Il dieci ha raggio $6,1 \text{ cm}$; il nove arriva a $12,2$; il bordo del disco sta a 61 cm . Un arciero di vertice ha un gruppo la cui ampiezza è circa i tre quarti della larghezza di un solo anello: è la sproporzione che rende il tiro con l'arco quel che è.

F02 · La scala angolare

In parole. Un gruppo di frecce non ha una dimensione assoluta: ha una dimensione angolare. Lo stesso errore di mira produce un gruppo largo il doppio a distanza doppia. Lavorando in angoli invece che in centimetri, le formule valgono a qualunque distanza senza riscriverle.

$$\rho = r / D \text{ a } 70 \text{ m: } 1 \text{ mrad} = 7 \text{ cm}$$

Da dove viene. Un milliradiante è un millesimo di radiante, e per angoli piccoli un radiante a distanza D sottende D . Quindi, a distanza D metri, un milliradiante sottende D millimetri: a settanta metri, settanta millimetri, cioè sette centimetri. Dividere una lunghezza in millimetri per la distanza in metri dà direttamente milliradiani.

Un numero. L'anello da 61 mm a settanta metri vale $61/70 = 0,871 \text{ mrad}$. Il cerchio della X , $30,5/70 = 0,436 \text{ mrad}$. Un arciero da 690 punti ha $\sigma = 0,637 \text{ mrad}$, cioè $4,46 \text{ cm}$.

F03 · Il modello della dispersione

In parole. Dove finisce una freccia è il risultato di molte piccole imprecisioni indipendenti (la trazione, il rilascio, l'aria, il gesto) che si sommano. Quando molte cause piccole e indipendenti si sommano, il risultato tende a distribuirsi come una gaussiana. La nuvola di impatti è quindi una campana bidimensionale centrata sul punto di mira. Il modello ne aggiunge una seconda, più larga e pesata poco, per rappresentare le frecce anomale: quelle che nessuna gaussiana ordinaria spiegherebbe.

$$(X, Y) \sim (1-E) \cdot N(B, \Sigma) + E \cdot N(B, K^2 \Sigma)$$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_x^2, \sigma_y^2)$$

Da dove viene. La prima componente descrive il gesto ordinario, con ampiezza σ_x in orizzontale e σ_y in verticale, centrata in b . La seconda ha la stessa forma ma è k volte più larga, e pesa ε . Ponendo $\varepsilon = 0$ resta la campana semplice; ponendo anche $\sigma_x = \sigma_y$ e $b = 0$ si ottiene il caso circolare centrato, che è quello che il saggio usa quasi ovunque perché ha soluzione esatta.

Un numero. Le quattro configurazioni del lavoro: circolare centrata (il caso base); ellisse verticale con $\sigma_y = 1,5 \sigma_x$; gruppo spostato di 3 cm dal centro; coda pesante con $\varepsilon = 0,05$ e $k = 3$, cioè una freccia su venti estratta da una nuvola tre volte più larga.

CHE COSA NON COPRE

σ è la deviazione standard

PER ASSE

, non il raggio del gruppo e nemmeno il suo diametro. Confondere le tre cose è l'errore più comune quando si leggono numeri di dispersione, e cambia i risultati di un fattore due o tre.

Il modello assume che le frecce siano indipendenti fra loro. Un arciero che perde il controllo per tre tiri di fila viola questa ipotesi, e il saggio lo dichiara fra i propri limiti.

Fo4 · La probabilità di cadere entro un raggio

In parole. Questa è la formula che fa funzionare tutto. Dice: data l'ampiezza della nuvola, quanto è probabile che una freccia cada entro un cerchio di raggio assegnato? Nel caso circolare centrato la risposta è una sola esponenziale, ed è per questo che il modello resta calcolabile a mano.

CIRCOLARE CENTRATA: $F(P) = 1 - \exp(-P^2 / 2\Sigma^2)$

gruppo spostato: $F(\rho) = 1 - Q_1(v/\sigma, \rho/\sigma)$

Da dove viene. Se le due coordinate dell'impatto sono gaussiane indipendenti con la stessa ampiezza σ , la distanza dal centro segue una distribuzione che si chiama Rayleigh, e la sua probabilità di superare un raggio r è esattamente $\exp(-r^2/2\sigma^2)$. È una formula che si incontra ovunque si sommino due errori indipendenti ad angolo retto: in balistica, in radar, in metrologia. La probabilità di cadere entro r è il complemento a uno.

Quando il gruppo è spostato dal centro di una quantità v , la stessa distribuzione prende il nome di Rice e la formula richiede la funzione Q di Marcum: resta esatta, ma non più elementare. Quando la nuvola è ellittica la simmetria circolare si perde e non esiste primitiva; in quel caso l'integrale va valutato numericamente in coordinate polari:

$$F(P) = \int_0^{\theta} \int_0^{\rho} (2\Pi\Sigma_x\Sigma_y)^{-1} \cdot$$

$$\exp[-(t \cos\theta - b_x)^2/2\sigma_x^2 - (t \sin\theta - b_y)^2/2\sigma_y^2] \cdot t \, dt \, d\theta$$

$$\text{mistura: } F(\rho) = (1-\varepsilon) F_{\{\sigma\}}(\rho) + \varepsilon F_{\{k\sigma\}}(\rho)$$

Il dettaglio che conta. Quel fattore t alla fine dell'integrale è lo jacobiano del passaggio a coordinate polari: tiene conto del fatto che una corona sottile lontana dal centro contiene più area di una vicina. Dimenticarlo è l'errore più naturale in questo calcolo, e produce risultati che sembrano ragionevoli, ma sono sbagliati. È esattamente il motivo per cui il saggio racconta la validazione contro un campione enorme: nel caso circolare quella parte del calcolo si semplifica e sparisce, quindi confrontarsi con la formula esatta non basta a scoprire l'errore.

Un numero. Per l'arciere da 690, con $\sigma = 4,46$ cm, la probabilità di cadere oltre il bordo del dieci vale $\exp(-6,1^2 / 2 \cdot 4,46^2) = 0,393$. Cioè: quasi quattro frecce su dieci escono dal giallo interno. Nel caso circolare l'integrazione numerica riproduce la formula esatta fino all'undicesima cifra.

Fo5 · Quanto è grande, davvero, quella nuvola

In parole. σ è un numero comodo per le formule, ma poco chiaro per un arciero. Queste tre conversioni lo traducono in grandezze che si riconoscono guardando il bersaglio: la distanza media di una freccia dal centro, quella mediana, e il raggio entro cui ne cade il novantacinque per cento.

$$E[R] = \Sigma \sqrt{(\Pi/2)} \approx 1,253 \Sigma \text{ MEDIANA} = \Sigma \sqrt{(2 \ln 2)} \approx 1,177 \Sigma$$

$$R_{95} = \sigma \sqrt{(2 \ln 20)} \approx 2,448 \sigma$$

Da dove viene. Sono i momenti e i quantili della Rayleigh di Fo4. Il quantile si ricava invertendo l'esponenziale: se si vuole il raggio che ne contiene una frazione q , basta imporre $1 - \exp(-r^2/2\sigma^2) = q$ e risolvere, da cui $r = \sigma\sqrt{-2 \ln(1-q)}$.

Un numero. L'arciere da 690 punti, $\sigma = 4,46$ cm: la freccia media cade a 5,59 cm dal centro, metà delle frecce entro 5,25 cm, il novantacinque per cento entro 10,92 cm. Quest'ultimo numero è meno di due anelli: tutto il gruppo di un arciere di vertice sta dentro il nove.

Parte seconda — Dal punteggio alla nuvola, e ritorno

Qui sta il perno di tutto il lavoro. Un punteggio è un'informazione pubblica: sta nelle classifiche, chiunque lo può leggere. L'ampiezza di un gruppo non lo è: richiede di misurare dove ogni freccia è finita, e quei dati non esistono in forma accessibile. Queste quattro formule costruiscono il ponte fra le due, e permettono di ragionare su arcieri descritti da un numero che tutti hanno.

Fo6 · La probabilità di ogni singolo punteggio

In parole. È la formula che il saggio mostra. Dice quanto è probabile che una freccia valga esattamente s punti: si prende la probabilità di cadere entro il bordo esterno dell'anello e si sottrae quella di cadere entro il bordo interno. Due sottrazioni, e si ottiene l'intero listino dell'arciere.

$$P_v = F(P_v) - F(P_{v-1}) \quad P_0 = 1 - F(P_{10})$$

nel caso circolare centrato, per $s = 1 \dots 10$:

$$P(S = s) = \exp(-[(10-s)w]^2 / 2\sigma^2) - \exp(-[(11-s)w]^2 / 2\sigma^2)$$

Da dove viene. L'anello che vale s punti sta fra un raggio interno di $(10-s)w$ e uno esterno di $(11-s)w$; lo si ricava da Fo1 sostituendo $k = 11-s$. Fare esattamente s punti significa cadere più lontano del bordo interno, ma non più lontano di quello esterno. Poiché $\exp(-r^2/2\sigma^2)$ è la probabilità di stare oltre il raggio r , la differenza fra i due esponenziali è esattamente quella probabilità. La forma con due esponenziali, invece che due sottrazioni da uno, non è un vezzo: è la stessa cosa scritta in modo che gli uno si cancellino.

Una verifica. Per $s = 10$ il raggio interno è zero, il primo esponenziale vale uno e resta $1 - \exp(-w^2/2\sigma^2)$, cioè la probabilità di cadere entro il primo anello. È il controllo che rende leggibile tutto il resto.

Un numero. Arciere da 690, $\sigma = 4,46$ cm: dieci nel 60,73 per cento dei casi, nove nel 36,89, otto nel 2,36, sette in due casi su diecimila, e da lì in giù praticamente mai. La somma su s da 1 a 10 fa esattamente uno, come deve. Il motore, che integra numericamente, dà gli stessi numeri con uno scarto inferiore a 10^{-17} .

CHE COSA NON COPRE

IL FUORI BERSAGLIO NON È COPERTO.

La formula vale per s da 1 a 10; per $s = 0$ non c'è un bordo esterno da sottrarre, e la probabilità è semplicemente $\exp(-(10w)^2/2\sigma^2)$.

LA X NON È COPERTA.

Il suo raggio è mezza larghezza d'anello, non un multiplo di w , quindi non rientra nello schema $(11-s)w$. Serve Fo9.

SOLO NUVOLE CIRCOLARI E CENTRATE.

Ellisse, gruppo spostato e coda pesante non hanno questa forma chiusa e passano per l'integrale di Fo4.

LA FRECCIA È TRATTATA COME UN PUNTO.

Il regolamento assegna il valore superiore a una freccia che tocca la linea, il che equivale ad allargare ogni anello del raggio dell'asta. Tenendone conto, la stessa σ produrrebbe 691,2 invece di 690. Non sposta le conclusioni, perché σ non è mai misurata ma ricavata dal punteggio, e la semplificazione si riassorbe nella calibrazione; sposta però i centimetri citati, di circa il due per cento.

Fo7 · Il punteggio atteso

In parole. Avendo la probabilità di ogni valore, il punteggio medio di una freccia è la media pesata dei valori. Moltiplicato per settantadue dà il totale atteso di un round di qualificazione.

$$\mu(\sigma) = \sum_{v=0}^{10} v \cdot p_v(\sigma) \quad T(\sigma) = 72 \cdot \mu(\sigma)$$

Da dove viene. È la definizione di valore atteso applicata al listino di Fo6. Non c'è nulla di più.

La proprietà che conta. La funzione μ è strettamente decrescente in σ su tutto il dominio: a ogni ampiezza corrisponde un punteggio, e più stretto è il gruppo, più alto è il punteggio, senza mai un'inversione. Sembra ovvio, e non lo è: basterebbe una geometria di volto un po' diversa perché non valesse. È questa monotonia a rendere possibile Fo8.

Un numero. A $\sigma = 4,46$ cm il punteggio medio è 9,5833 per freccia, cioè 690 su 72. A $\sigma = 7,17$ cm scende a 9,0278, cioè 650.

Fo8 · La calibrazione: dal punteggio all'ampiezza

In parole. È Fo7 letta all'indietro. Dato un punteggio medio, qual è l'unica ampiezza di nuvola che lo produce? Questa formula è ciò che permette di parlare di arcieri reali senza avere le loro coordinate d'impatto: si parte da un punteggio, se ne ricava una nuvola, e da lì si calcola tutto il resto.

$$\sigma(\bar{\mu}) : \text{l'unica soluzione di } \mu(\sigma) - \bar{\mu} = 0$$

Da dove viene. Non esiste una formula esplicita: $\mu(\sigma)$ è una somma di esponenziali e non si inverte a mano. Si risolve numericamente cercando lo zero, con il metodo di Brent, entro una tolleranza di 10^{-10} . L'unicità della soluzione è garantita dalla monotonia di Fo7: una funzione strettamente decrescente attraversa ogni valore una volta sola.

Un numero. Un punteggio atteso di 690 su 72 frecce dà $\sigma = 4,4613$ cm; 692 dà 4,3259; 650 dà 7,1654. Nell'intervallo di interesse la relazione è quasi perfettamente lineare: un punto di punteggio vale circa 0,68 millimetri di ampiezza, e questo valore resta praticamente identico da 630 fino a 700.

CHE COSA NON COPRE

L'ARGOMENTO È IL PUNTEGGIO ATTESO, NON QUELLO OSSERVATO.

Un arciere che in una gara ha totalizzato 690 non ha necessariamente un punteggio atteso di 690: quel round è una singola estrazione, e la sua deviazione standard vale 4,58 punti. Ne consegue che un 690 osservato è compatibile, con il novantacinque per cento di confidenza, con un'ampiezza ovunque fra 3,85 e 5,07 cm, un intervallo largo più di un centimetro. Risalire da una gara alla nuvola è un problema di stima con incertezza, non un'inversione. F21 lo quantifica.

F09 · Il tasso di X

In parole. La X è un cerchio come gli altri, solo più piccolo: la probabilità di centrarla si ottiene dalla stessa formula, con il suo raggio.

$$\rho_x = r_x / D \quad P(X) = 1 - \exp(-\rho_x^2 / 2\sigma^2)$$

Perché merita una voce a sé. Il raggio della X va derivato dalla geometria del volto, non scritto a mano come costante. È una precauzione che sembra pedanteria e non lo è: se un giorno si cambia volto o distanza, una costante cablata resta al valore vecchio e produce percentuali che non corrispondono più al bersaglio su cui si sta ragionando, senza che nulla segnali l'errore.

Un numero. A settanta metri $\rho_x = 30,5/70 = 0,4357$ mrad, cioè 3,05 cm. L'arciere da 692 punti mette in X il 22,0 per cento delle frecce: 15,8 su 72. Lo stesso arciere fa 45,4 dieci.

Parte terza — I due formati di gara

Fin qui si è descritto un arciere. Adesso se ne mettono due uno di fronte all'altro e si calcola chi vince, con ciascuna delle due aritmetiche. Sei formule, e nessuna di esse richiede di giocare una partita: la probabilità si costruisce per intero, contando tutti i modi in cui il match può andare e pesandoli.

F10 · Il punteggio di una volée

In parole. Se si conosce la probabilità di ciascun valore per una freccia, la probabilità di totalizzare un certo punteggio con tre frecce si ottiene contando tutti i modi in cui quel totale si può comporre. L'operazione che fa questo conto si chiama convoluzione.

$$P(S_n = s) = (p^{\{n\}})_s \quad s = 0, \dots, 10n$$

Da dove viene. Con due frecce, la probabilità di totalizzare 19 è la probabilità di fare 10 e poi 9, più quella di fare 9 e poi 10: si sommano tutte le coppie che danno 19, moltiplicando le rispettive probabilità. Ripetendo per ogni totale possibile si ottiene la distribuzione di due frecce; ripetendo ancora, quella di tre. È esattamente la convoluzione, e con dieci valori possibili il conto è immediato per un calcolatore.

Un numero. Per il set servono tre frecce, dominio da 0 a 30; per il termine di confronto cumulativo ne servono quindici, dominio da 0 a 150. L'arciere da 692 chiude un 30 pieno nel 25,0 per cento delle volée; lo sfidante da 675, nel 9,9 per cento.

CHE COSA NON COPRE

La convoluzione presuppone che le frecce siano

INDIPENDENTI

: che il risultato di una non influenzi la successiva. È l'assunzione più forte del lavoro, ed è dichiarata fra i limiti del modello. Se l'errore si presentasse a grappoli (tre frecce storte di fila invece che tre sparse) il set system ne uscirebbe favorito, perché il grappolo resterebbe confinato in un set solo.

F11 · Chi vince una volée

In parole. Avendo la distribuzione del punteggio di volée di entrambi, si ricavano tre numeri: la probabilità che il primo faccia più punti, quella che pareggino, quella che ne faccia meno. Da questi tre si costruisce l'intero match.

$$P_W = \sum_s A_s \cdot B_{s-1} \quad P_T = \sum_s A_s \cdot B_s$$

$$p_l = 1 - p_w - p_t$$

Da dove viene. Per ogni punteggio s che A può fare, si moltiplica la sua probabilità per la probabilità che B faccia strettamente meno, cioè per la cumulata di B fino a $s-1$. Sommando su tutti gli s si ottiene la probabilità che A vinca la volée. Il pareggio è la somma dei prodotti dei valori uguali. La sconfitta è ciò che resta, e va calcolata così invece che ripetendo il conto: garantisce che i tre numeri sommino esattamente a uno.

Un numero. Il 692 contro il 675: vince il set nel 55,5 per cento dei casi, pareggia nel 24,7, perde nel 19,8. Da notare quanto sia alto il pareggio (un quarto delle volée) e quanto questo pesi in un formato che assegna punti-set.

F12 · Lo spareggio a freccia singola

In parole. Quando il match resta in parità, si tira una freccia a testa e vince chi la mette più vicina al centro. Questa formula dice con quale probabilità sia il più preciso a vincerlo, e ha una forma insospettabilmente semplice.

$$p_SO = \sigma_B^2 / (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)$$

Da dove viene. Se la nuvola è circolare e centrata, il quadrato della distanza dal centro segue una distribuzione esponenziale di media $2\sigma^2$. Per due esponenziali indipendenti la probabilità che la prima sia minore della seconda è il rapporto fra il parametro della seconda e la somma dei due parametri: dopo la sostituzione, esattamente $\sigma_B^2/(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)$. Nessuna approssimazione, nessun integrale.

Perché è notevole. La regola «vince chi è più vicino al centro» è, sotto queste ipotesi, la decisione statisticamente ottima: fra tutte le regole che si possono applicare a una freccia sola, è quella che massimizza la probabilità di indicare il più preciso.

Un numero. Fra il 692 e il 675 lo spareggio non è un testa o croce: il più forte lo vince nel 61,57 per cento dei casi. È un dettaglio che sembra minore e non lo è: sostituire questo valore con 0,5 sposta i tassi di paradosso di mezzo punto percentuale, ed è un errore che è stato trovato e corretto in fase di collaudo.

CHE COSA NON COPRE

Le tre ipotesi (nuvola circolare, centrata, e le due frecce indipendenti) servono tutte. Per gruppi ellittici o decentrati la formula non vale e si usa la versione integrale, che nel caso circolare restituisce lo stesso numero.

F13 · Il match a set, risolto all'indietro

In parole. Questa è la formula che calcola una gara che non si è mai giocata. L'idea è di partire dalla fine: si guarda ogni situazione in cui il match può concludersi e si sa già chi ha vinto; poi si torna indietro di un set, e la probabilità di vincere da lì è la media pesata delle probabilità dei tre esiti possibili. Ripetendo fino allo stato iniziale, zero a zero, si ottiene la probabilità esatta di vincere il match.

$$V = 1 \text{ SE } A \geq 6 \quad V = 0 \text{ SE } B \geq 6$$

$$V(a,b,5) = 1 \text{ se } a > b ; 0 \text{ se } b > a ; p_{\text{so}} \text{ se } a = b$$

$$V(a,b,e) = p_w V(a+2, b, e+1)$$

$$+ p_t V(a+1, b+1, e+1) + p_l V(a, b+2, e+1)$$

$$\pi_{\text{set}} = V(0, 0, 0)$$

Da dove viene. Lo stato del match è descritto da tre numeri: i punti-set di A, quelli di B, e quanti set si sono giocati. Da ogni stato si può andare in tre direzioni (A vince il set e prende due punti, pareggiano e ne prendono uno a testa, B vince il set) con le probabilità di F11. La probabilità di vincere partendo da uno stato è quindi la somma delle probabilità di vincere partendo dai tre stati successivi, ciascuna pesata. Il procedimento si chiama induzione all'indietro ed è lo stesso che si usa per risolvere i giochi a informazione perfetta.

Un dettaglio facile da sbagliare. I punti-set possono essere dispari, perché una volée pari ne assegna uno a ciascuno. Gli stati raggiungibili comprendono quindi 1-1, 3-1, 3-3, 5-3 e 5-5, e un'implementazione che considerasse solo i pari produrrebbe numeri sbagliati senza dare alcun segnale. Il 5-5 è l'unico stato terminale che non decide il match, e va allo spareggio di F12.

Un numero. Il 692 contro il 675 vince il match a set con probabilità 0,846819. Il conto è esatto: non c'è campionamento, non c'è simulazione, e ripetendolo si ottiene la stessa cifra fino all'ultimo decimale.

F14 · Il punteggio cumulativo

In parole. L'altra aritmetica: si sommano tutte le frecce e vince il totale più alto, con lo spareggio in caso di parità. La formula è più semplice di quella a set proprio perché non c'è struttura da attraversare.

$$\pi_{\text{cum}}(n) = P(T_A > T_B) + p_{\text{so}} \cdot P(T_A = T_B)$$

Da dove viene. I due totali si ottengono da F10 con n frecce. La probabilità che il primo sia maggiore si calcola come in F11, ma sui totali invece che sulle volée. La parità va allo stesso spareggio del formato a set: è essenziale che sia lo stesso, altrimenti il confronto fra le due aritmetiche misurerebbe anche la differenza fra due regole di parità diverse.

Un numero. Con quindici frecce, il 692 batte il 675 con probabilità 0,870019, contro 0,846819 del formato a set. La differenza fra questi due numeri è il costo del formato, ed è tutto ciò che il saggio cerca di misurare.

F15 · Quanto dura, in media, un match

In parole. Un match a set può finire in tre, quattro o cinque set. Questa formula dice quanti se ne giocano in media, e quindi quante frecce si tirano davvero.

$$E[\text{set}] = \sum_{k=1}^5 k \cdot \pi_k \quad \bar{n} = 3 \cdot E[\text{set}]$$

Da dove viene. π_k è la probabilità che il match si chiuda esattamente al set k, che la ricorsione di F13 restituisce come sottoprodotto: basta accumulare la massa di probabilità che entra negli stati assorbenti a ciascuna profondità.

Un numero. Fra il 692 e il 675 si giocano in media 4,268 set, cioè 12,80 frecce invece delle quindici di un match completo. Poco più di due frecce di differenza, e sono quelle su cui si gioca la scomposizione di F19 e il teorema di F18.

Parte quarta — Le grandezze pubblicate

Tutto ciò che il saggio afferma esce da queste sei formule. Le prime due misurano il costo del formato e ciò che il formato butta via; la terza è un teorema che chiarisce dove quel costo abbia origine; le ultime tre riguardano il paradosso, e quanto rumore ci sia in una classifica di qualificazione.

F16 · Il costo del formato

In parole. È la grandezza centrale del lavoro: quanto spesso, in più, il punteggio cumulativo indica il vincitore giusto rispetto al set system, a parità di frecce tirate. Si misura in punti percentuali, cioè in match ogni cento.

$$\Delta(T_A, T_B) = 100 \cdot [\pi_{\text{cum}}(15) - \pi_{\text{set}}]$$

Da dove viene. È semplicemente la differenza fra F14 e F13. Ciò che rende il confronto onesto sono due scelte: lo stesso numero di frecce, quindici, che il teorema di F18 dimostra essere il termine corretto; e lo stesso spareggio in entrambi i formati, così che la differenza isoli l'aggregazione e non la regola di parità.

Come si legge il segno. Positivo significa che il cumulativo riconosce più spesso l'arciere più preciso. Se i due arcieri hanno lo stesso punteggio atteso non c'è un più preciso da riconoscere: entrambi i formati danno 0,5 e Δ vale zero per simmetria, non per successo. È una precisazione che conta, perché il numero zero in quel punto non significa «i due formati si equivalgono», ma «la domanda non ha oggetto».

La convenzione. Il costo dipende da chi si mette di fronte all'arciere forte, quindi va scelto un criterio. Qui si tiene fisso il livello del più forte, si fa variare l'avversario su una griglia da mezzo punto fino a quaranta punti sotto, e si prende il massimo. È il caso peggiore, non il caso medio: una scelta prudente, che va dichiarata perché cambiando criterio cambia il numero.

Un numero. Al livello 692 il picco vale 2,32 punti percentuali, e cade contro un avversario da 675. Scendendo di livello il costo cresce: 2,38 a 690, 2,63 a 680, 2,82 a 670, 2,97 a 660. Il formato a set penalizza di più chi è più lontano dal vertice.

F17 · Di quanto si vince un set

In parole. Il set system assegna due punti a chi vince il set, che lo vinca per un punto o per dieci. Questa formula misura quanto vale in media quel margine: è l'informazione che il cumulativo conserva e il formato a set cancella.

$$E[\delta \mid \delta > 0] = \sum_{\{d > 0\}} d \cdot P(\delta = d) / P(\delta > 0)$$

Da dove viene. δ è la differenza fra i punteggi di volée dei due arcieri. La sua distribuzione si ottiene dalle due distribuzioni di volée di F10 con una correlazione incrociata, tecnicamente la convoluzione di una con l'altra rovesciata. Da lì si prende la media condizionata ai valori positivi.

Un numero. Fra il 692 e il 675 un set vinto lo si vince in media per 1,76 punti, e in oltre metà dei casi per due o più. Fra due arcieri identici il margine medio scende a 1,41. Quel margine viene ricondotto a due punti-set qualunque sia la sua ampiezza, e non attraversa il confine del set: è, in una riga, il meccanismo di tutto il costo.

F18 · Teorema: fermarsi presto è gratis

In parole. Un match a set si interrompe appena uno dei due raggiunge sei punti-set, e le frecce restanti non si tirano. Verrebbe naturale pensare che quelle frecce mancanti costino qualcosa in precisione della misura. Questo teorema dimostra che non costano nulla: chi vince fermandosi avrebbe vinto anche giocando fino in fondo. Sempre, non quasi sempre.

Enunciato. Mettiamo a confronto due modi di giocare lo stesso match. Il primo è quello del regolamento: si smette appena uno dei due arriva a sei punti-set, e le frecce che restavano non si tirano. Il secondo gioca comunque tutti e cinque i set fino in fondo, e assegna la vittoria a chi ha più punti-set alla fine, risolvendo il cinque pari con lo stesso spa-

reggio. Il teorema dice che i due modi indicano sempre lo stesso vincitore. Non in media, e non quasi sempre: per qualunque coppia di arcieri e per ogni singola partita, presa una per una.

Dimostrazione. In cinque set si distribuiscono in tutto dieci punti-set, due per set. Supponiamo che A arrivi a sei alla fine del set numero e . Allora, poiché i punti assegnati fino a quel momento sono $2e$:

$$b_e = 2e - a_e \leq 2e - 6$$

Nei $5-e$ set che restano se ne distribuiscono altri $2(5-e)$. Anche assegnandoli tutti a B, il suo totale finale non può superare:

$$b_5 \leq (2e - 6) + (10 - 2e) = 4$$

mentre A ne ha almeno sei. Dunque $a_5 \geq 6 > 4 \geq b_5$: A vince anche la versione lunga. L'argomento è simmetrico per B, e se nessuno arriva a sei le due versioni coincidono per costruzione. Il teorema è dimostrato senza alcun conto numerico: è una proprietà dell'aritmetica dei punti-set, non del modello di dispersione.

La verifica. Il motore calcola entrambe le versioni per la coppia 692 contro 675 e ottiene 0,846819200346337 in tutti e due i casi. Lo scarto non è piccolo: è esattamente zero.

Perché conta. Due conseguenze, e sono le più importanti del saggio. La prima: il termine di confronto corretto per F16 è il cumulativo su quindici frecce, non sulla durata media di dodici frecce e otto decimi. La seconda, che ne discende: l'intero costo del formato appartiene alla regola di aggregazione, non alla brevità del match. Se fosse la brevità la causa, allungare il match ridurrebbe il divario; accade il contrario: tre set contro nove frecce danno 1,84 punti percentuali, cinque contro quindici 2,32, sette contro ventuno 2,38. Ogni set in più è un confine in più dove il margine viene cancellato.

F19 · La scomposizione

In parole. Il costo totale si può spezzare in due pezzi confrontando il set system con due cumulativi diversi: quello su quindici frecce e quello sulla durata media effettiva del match. Il secondo pezzo è quello che va nominato con cura.

$$\pi_{\text{cum}}(\bar{n}) = \pi_{\text{cum}}(\lfloor \bar{n} \rfloor) + (\bar{n} - \lfloor \bar{n} \rfloor) \cdot [\pi_{\text{cum}}(\lfloor \bar{n} \rfloor + 1) - \pi_{\text{cum}}(\lfloor \bar{n} \rfloor)]$$

$$\Delta_{\text{regola}} = 100 [\pi_{\text{cum}}(\bar{n}) - \pi_{\text{set}}] = 0,50 \text{ pp}$$

$$\Delta_{\text{frecce_extra}} = 100 [\pi_{\text{cum}}(15) - \pi_{\text{cum}}(\bar{n})] = 1,82 \text{ pp}$$

Da dove viene. La durata media di F15 non è un numero intero (12,80 frecce) e il cumulativo è definito solo su conteggi interi, quindi si interpola linearmente fra dodici e tredici.

L'etichetta. Il secondo termine non è il costo della brevità del match. Per il teorema di F18 quel costo è esattamente nullo. Il termine misura una cosa diversa e comunque interessante: la resa marginale delle 2,2 frecce aggiuntive sotto il punteggio cumulativo, cioè quanto renderebbe una freccia in più a chi somma i punti. È una grandezza vera, calcolata correttamente, che per un certo periodo ha portato il nome sbagliato.

Perché non si media sulle durate. Verrebbe naturale calcolare il cumulativo mediando sulla distribuzione delle durate invece che alla durata media. Sarebbe un errore: la lunghezza del match è correlata con l'esito (le sfide sbilanciate finiscono prima) e mediare per durata reintrodurrebbe nel conto proprio l'informazione che il confronto vuole isolare. Per trasparenza: arrotondando a tredici frecce il primo termine salirebbe a 0,68; mediando sulla distribuzione scenderebbe a 0,32.

F20 · Il paradosso: vincere avendo fatto meno punti

In parole. Nel formato a set può accadere che chi vince il match abbia totalizzato meno punti grezzi dell'avversario. Questa formula calcola con quale frequenza.

$$\kappa^+(d) = P(\delta = d), d > 0 \quad \kappa^-(d) = P(\delta = d), d < 0 \quad p_0 = P(\delta = 0)$$

Da dove viene. La ricorsione è quella di F13, ma lo stato porta un terzo numero: la differenza grezza cumulata fra i due totali. Il segno di δ decide il set e fa avanzare i punti-set; il valore di δ aggiorna la differenza grezza. Quando il match si chiude, si somma la massa di probabilità in cui il vincitore ha differenza negativa. Le due cose viaggiano insieme nello stesso passaggio, ed è per questo che serve una ricorsione congiunta invece di due conti separati.

Due valute. Il paradosso ha due definizioni, e rispondono a domande diverse. La prima confronta i totali sulle frecce effettivamente tirate, cioè nove, dodici o quindici a seconda di come è andata. La seconda li confronta su quindici frecce per entrambi, come controfattuale: è la domanda «se avessero tirato tutti e cinque i set, chi avrebbe più punti?». La seconda assume che le frecce non tirate sarebbero state estensioni indipendenti dello stesso processo, ed è un'assunzione dichiarata.

Un numero. Fra due arcieri di vertice sostanzialmente pari, il 692 contro se stesso: 7,1 per cento sulle frecce tirate, 7,6 sul controfattuale a quindici. Scendendo di livello sale: 9,2 per cento a 670, oltre il 10 a 650. Alla coppia di picco 692 contro 675, dove lo spareggio è asimmetrico, i valori sono 4,7 e 5,2, più bassi perché il divario di bravura rende il ribaltamento più difficile.

F21 · Quanto rumore c'è in un punteggio di qualificazione

In parole. Un round da settantadue frecce non è una misura esatta della bravura: è una singola estrazione. Queste formule dicono di quanto due arcieri identici possono ritrovarsi separati in classifica per puro caso, e quanta fiducia si possa riporre in un distacco osservato.

$$V = \sum (V - M)^2 P, \quad SD(T) = \sqrt{72 V}$$

$$SD(D) = \sqrt{2} \cdot SD(T) \quad E|D| = SD(D) \cdot \sqrt{2/\pi}$$

Da dove viene. La varianza di una freccia è quella della sua distribuzione di punteggio; su settantadue frecce indipendenti le varianze si sommano, quindi la deviazione standard del totale è la radice di settantadue volte quella singola. Per la differenza fra due round indipendenti le varianze si sommano di nuovo, da cui il fattore $\sqrt{2}$. Il valore atteso del modulo della differenza (il distacco come lo intende un lettore) è un'altra cosa ancora: per una normale a media nulla vale $\sqrt{2/\pi}$ volte la deviazione standard, cioè circa il 79,8 per cento.

Un numero. Al livello 692: varianza per freccia 0,2757, deviazione standard di un round 4,455 punti, della differenza fra due round 6,300, distacco medio in valore assoluto 5,027. I due numeri 6,30 e 5,03 descrivono la stessa quantità e non sono intercambiabili: usarli come sinonimi è l'errore che questa appendice esiste anche per prevenire.

Il distacco che garantisce il novantacinque per cento di sicurezza sull'ordine, a una coda, vale 1,645 volte la deviazione standard della differenza: **10,36 punti**. Da lì la tabella di confidenza:

distacco osservato	confidenza sull'ordine vero
1 punto	56,3 %
3 punti	68,3 %
5 punti	78,6 %
8 punti	89,8 %
12 punti	97,2 %
16 punti	99,4 %

Che cos'è quella colonna. Non è un intervallo di confidenza in senso frequentista: è una probabilità a posteriori. Detta Δ la differenza vera fra i punteggi attesi e g quella osservata, si ha $D \mid \Delta \sim N(\Delta, SD(D)^2)$; assumendo che, prima di guardare i punteggi, ogni valore di Δ sia altrettanto plausibile, la distribuzione a posteriori è $N(g, SD(D)^2)$, e:

$$C(G) = P(\Delta > 0 \mid D = G) = \Phi(G / SD(D))$$

CHE COSA NON COPRE

IL PRIOR CONTA, E VA NOMINATO.

«Ogni valore altrettanto plausibile» non individua una distribuzione se non si dice di quale grandezza: piatto sull'ampiezza, piatto sul punteggio atteso e piatto sul logaritmo dell'ampiezza danno tre tabelle diverse. Qui è piatto sulla differenza fra i

PUNTEGGI ATTESI

.

LA DIREZIONE DELL'ERRORE È NOTA.

In una griglia di gara reale gli arcieri vicini in classifica sono vicini anche per valore, quindi un prior realistico renderebbe un distacco osservato

MENO

probante di quanto la tabella dichiara. I numeri qui sopra sono un ottimismo dichiarato.

Parte quinta — Robustezza e tornei

Le ultime tre formule servono a rispondere alla domanda che un lettore diffidente pone giustamente per prima: e se le ipotesi fossero sbagliate? Si cambia la forma della nuvola, si cambia la densità al centro, si cambia la composizione del campo, e si guarda se la conclusione tiene.

F22 · Confrontare due forme senza confrontare due livelli

In parole. Per sapere se la forma della nuvola cambia i risultati bisogna cambiare la forma tenendo fermo tutto il resto. Il problema è che deformare una nuvola ne cambia anche il punteggio: se non si corregge, si finisce per misurare quanto è bravo l'arciere invece di come è fatto il suo gruppo.

$s^*(\bar{\mu})$: l'unico s tale che $\mu(M(s)) = \bar{\mu}$

Da dove viene. È di nuovo un'inversione come Fo8, ma applicata a una famiglia di forme invece che alla singola ampiezza: dato un punteggio medio bersaglio, si cerca il parametro di scala che lo produce con quella forma. Fatto questo, tutte le forme confrontate producono lo stesso punteggio e la differenza residua è attribuibile alla forma soltanto.

Perché serve davvero. Un gruppo da 692 punti allungato a 1,5 a 1 senza ricalibrare vale in realtà 675,2 punti: la deformazione avrebbe degradato l'arciere di 17,3 punti senza che nulla lo segnalasse, e si sarebbe conclusa che la forma conta moltissimo quando in realtà si stava confrontando un arciere forte con uno mediocre. Con la ricalibrazione la forma risulta quasi irrilevante: circolare 2,32 punti percentuali, ellisse 2,34, gruppo spostato 2,36.

L'unica forma che sposta il risultato. La coda pesante: con una freccia su venti estratta da una nuvola tre volte più larga, il costo del formato crolla a 0,68, meno di un terzo. Il set system protegge chi sbaglia in modo estremo, perché confina la freccia catastrofica nel set in cui cade. Il difetto si trasforma in scudo, e uno scudo protegge qualcuno.

La convenzione della mistura. Ricalibrando una coda pesante si scalano entrambe le componenti insieme, mantenendo fisso il rapporto tre a uno fra coda e nucleo. È una scelta, va dichiarata, e non è neutra: scalando il solo nucleo il valore risulterebbe molto più basso.

La costanza, in numeri. Mettendo di fronte un arciere regolare e uno irregolare che producono lo stesso punteggio medio, il regolare vince il 48,5 per cento dei match col cumulativo e il 45,4 col set system. Il formato a set penalizza la costanza, contro l'intuizione comune e contro le ragioni con cui fu adottato.

CHE COSA NON COPRE

Nei modelli deformati lo spareggio è calcolato con le ampiezze

CIRCOLARI EQUIVALENTI

, altrimenti la forma rientrerebbe dalla porta di servizio proprio nel punto che dovrebbe restarne immune.

F23 · E se la nuvola fosse più densa al centro?

In parole. Un'obiezione ragionevole: gli arcieri di vertice potrebbero avere un nucleo centrale più concentrato di quanto una gaussiana preveda. Questa formula costruisce nuvole con quella proprietà, a punteggio invariato, e verifica se la conclusione regge.

$$F(\rho) = (1-w)[1 - \exp(-\rho^2/2s_1^2)] + w[1 - \exp(-\rho^2/2s_2^2)]$$

Da dove viene. Due componenti circolari di ampiezza diversa, pesate per metà ciascuna. I due parametri s_1 e s_2 non si scelgono a piacere: sono determinati da due vincoli, il punteggio medio da rispettare e il tasso di X da raggiungere. Aumentando il tasso di X a punteggio fisso si ottiene esattamente una nuvola più densa al centro e più diffusa in periferia.

La convenzione. Entrambi gli arcieri vengono densificati dello stesso incremento sopra il tasso di X che la loro nuvola circolare avrebbe naturalmente. Con incremento nullo la mistura degenera nella circolare pura e il costo torna a coincidere con il picco di F_{16} , il che è il controllo che la costruzione sia coerente.

Un numero. Portando il tasso di X del più forte dal 22 al 30 per cento, il costo del formato sale da 2,32 a 3,13 punti percentuali: 2,53 al 24 per cento, 2,74 al 26, 2,94 al 28. La direzione, la densità centrale fa crescere il costo, di circa 0,8 punti percentuali, non dipende dalla convenzione adottata. Il valore preciso sì, ed è per questo che la convenzione va dichiarata.

F24 · Campi parametrici e propagazione sul tabellone

In parole. Un torneo non è un match: è un albero di sessantaquattro arcieri e sei turni. Per capire se il formato cambia chi vince un torneo, bisogna costruire campi di gara e propagare le probabilità turno dopo turno. I campi qui non sono campi reali, sono quattro forme costruite apposta per isolare l'effetto di come i livelli si distribuiscono.

$$T_i = 684 - 60 \cdot F(U), U = (I-2)/62$$

f: concavo $u^{1,6}$ · lineare u · convesso $u^{0,6}$ · sigmoide logistica

Da dove viene. Vertice e ampiezza del campo restano fissi (la testa di serie fa 692, la seconda 684, l'ultima 624) e cambia soltanto la funzione che riempie lo spazio in mezzo. Un campo concavo ha molti arcieri raccolti vicino al vertice; uno convesso ne ha pochi in alto e una lunga coda; il lineare li distribuisce uniformemente; la sigmoide li addensa al centro. Da ogni punteggio si ricava l'ampiezza con F_{08} , da ogni coppia le probabilità con F_{13} e F_{14} , e le si propaga sull'albero standard, quello che accoppia 1 con 64, 32 con 33, e così via.

Un numero. Probabilità d'oro della testa di serie, formato a set contro cumulativo: campo concavo **30,9 contro 34,5** per cento, lineare **42,5 contro 46,7**, convesso **58,4 contro 62,7**, sigmoide **31,1 contro 34,4**. La composizione del campo pesa più del formato — fra concavo e convesso ci sono ventisette punti percentuali — ma il verso della differenza fra i due formati è lo stesso in tutti e quattro i casi.

CHE COSA NON COPRE

NESSUNO DI QUESTI CAMPI È UN CAMPO REALE.

Sono costruzioni parametriche, e servono a mostrare che la conclusione non dipende da una particolare composizione, non a prevedere l'esito di un torneo che si terrà.

Le assunzioni, tutte insieme

Ogni formula di questa appendice poggia su scelte di modellazione. Elencarle in fondo, in un posto solo, serve a un lettore che voglia sapere non tanto se i conti sono giusti (quelli si possono rifare) ma se il modello descriva la cosa giusta. La terza colonna, dove è deducibile, dice verso quale lato il risultato si sposterebbe se l'assunzione cadesse.

assunzione	perché	se cadesse
Frecce indipendenti	Rende il totale una convoluzione e il conto esatto.	Con errori a grappolo il set system guadagna: la coda si concentra in un set solo.
Dispersione costante nel round	Un solo parametro per arcieri; nessun dato per stimarne la deriva.	La forchetta della qualificazione si allarga: le soglie di F21 sono un pavimento, non un tetto.
Nessuna dipendenza fra i due arcieri	Esclude vento condiviso e influenza reciproca.	Vento condiviso riduce la varianza della differenza: il distacco diventa più informativo.
Nessuna strategia, nessun ordine di tiro	Il modello misura la precisione, non il gioco.	Ignoto in segno: fa parte del residuo non spiegato.
Nessun effetto della pressione	Non misurabile senza dati.	Non identificabile: il residuo comprende anche errore di modello, attrezzatura, forma del giorno.
Livelli sintetici	Nessun punteggio di arciere reale entra nel lavoro.	Non applicabile: la conclusione è sul formato, non su una popolazione.
Famiglia gaussiana bivariata	Trattabile, e messa alla prova contro tre deformazioni.	Testata: ellisse e bias spostano il costo di centesimi; la coda pesante lo riduce a meno di un terzo.
Parametri noti senza incertezza	I due arcieri sono definiti dai loro punteggi attesi.	Con l'ampiezza stimata, l'incertezza si somma a quella del formato (vedi Fo8 e F21).
Freccia puntiforme	Semplifica la geometria delle zone.	La regola del taglio della linea sposta di circa un punto la mappa punteggio–ampiezza; si riassorbe nella calibrazione.

Una nota su che cosa tutto questo dimostri

Nessuna di queste formule dimostra che il modello descriva bene la realtà del tiro con l'arco. Quella è una questione diversa, e i limiti che la riguardano sono elencati qui sopra. Dimostrano una cosa più modesta e comunque necessaria: che i numeri pubblicati sono davvero ciò che le formule dichiarate producono, e che chiunque voglia contestarli, sa esattamente dove mettere le mani. Un modello sbagliato produce numeri sbagliati anche se i conti sono giusti; ma un modello di cui non si conoscono le formule non si può nemmeno sbagliare in modo utile.

È il motivo per cui questa appendice esiste. Le conclusioni del saggio si possono discutere in due modi: contestando i conti, e allora servono le formule e il codice, che sono qui e nel pacchetto di riproduzione; oppure contestando le assunzioni, e allora serve la tabella qui sopra. Il secondo modo è più interessante del primo, e chi lo percorresse troverebbe che il lavoro gli ha già preparato la strada.